TEORJA DOWODU

T. C

# WYKŁADY UNIWERSYTECKIE

DR. JANA SLESZYŃSKIEGO
PROFESORA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

TOM I

# TEORJA DOWODU I

KRAKÓW 1925.
NAKŁADEM KÓŁKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNEGO U. U. J.

# TEORJA DOWODU

## PODŁUG WYKŁADÓW UNIWERSYTECKICH PROF. DR. JANA SLESZYŃSKIEGO

OPRACOWAŁ

S. K. ZAREMBA

TOM I

WYDANO Z ZASIŁKU WYDZIAŁU NAUKI MINISTERSTWA W. R. i O. P

KRAKÓW 1925

NAKŁADEM KÓŁKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNEGO U. U. J.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNIACH GEBETHNERA I WOLFFA

WARSZAWA — KRAKÓW — LUBLIN — ŁODŹ — POZNAŃ — WILNO — ZAKOPANE — PARYŻ

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM JÓZEFA FILIPOWSKIEGO

# SPIS RZECZY.

Książka niniejsza powstała z wykładów, które pod tym samym tytułem wygłaszał Pan Profesor Sleszyński na Uniwersytecie Jagiellońskim. Plan dzieła wzorowany jest na kursie z lat 1921/22 i 1922/23, w szczególności, tom pierwszy odpowiada wykładom z roku 1921/1922. Jednakowoż uwzględniono w nim niektóre inowacje, wprowadzone w ostatnim roku wykładów Teorji dowodu, t. j. 1923/24. Dla ścisłości nadmieniam jeszcze, iż w rozdziałach VII i VIII dodałem również w porozumieniu z Panem Profesorem Sleszyńskim, parę dowodów mojego pomysłu. Niech mi tutaj będzie wolno wyrazić Mu moją głęboką wdzięczność za cenne rady, których mi nie szczędził, podczas gdy redagowałem wspomniane wykłady, tudzież za udzielenie mi swoich rękopisów, dzięki czemu mogłem niejedną niedokładność w mojem opracowaniu sprostować i dodać niektóre zajmujące szczegóły, na które w wykładzie nie było miejsca. Spełniam także miły obowiązek dziękując najserdeczniej: mojemu przyjacielowi R. M. Wasserbergerowi za nader skrupulatne przeprowadzanie korekty i za niewdzięczny trud sporządzenia skorowidzów alfabetycznych; Zarządowi Kółka Matematyczno-Fizycznego U. U. J. za podjęcie się nakładu książki w obecnych trudnych warunkach; Drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego za sumienne wykonanie druku.

*S. K. Zaremba.*

Paryż, maj 1925.

# Dostrzeżone omyłki druku.

| | zamiast | ma być |
|---|---|---|
| Str. 9 w. 2 z góry | pojmując | przyjmując. |
| „ 23 „ 6 „ „ | definicji | definicyj. |
| „ 33 „ 4 z góry | Tectet | Teetet. |
| „ 33 „ 17 „ „ | nadwyrężyć | nadwerężyć |
| „ 42 w tyt. rozdziału | Rozwój logiki | rozwój logiki. |
| „ 44 w. 4 z dołu | p. t Wissenschaftslehre“. | |
| | ma być p. t „Wissenschaftslehre“. | |
| „ 49 „ 7 „ „ | nterpretacji | interpretacji |
| „ 57 „ 10 z góry | klasowymi | klasowemi. |
| „ 72 „ 10 z dołu | $-PE-S$ | $-PA-S$. |
| „ 79 „ 14 „ „ | przpomina | przypomina. |
| „ 109 „ 18 „ „ | figury III. | figury IV. |
| „ 113 „ 12 „ „ | *R*. Grassmann | R. Grassmann. |
| „ 121 „ 5 z góry | $M_2, M_2, \ldots, M_n$ | $M_1, M_2, \ldots, M_n$ |
| „ 121 „ 5 z dołu | $M_n\ A\ M_n\ _1$ | $M_n\ A\ M_{n-1}$ |
| „ 125 „ 2 z góry | $J$ | $I$ |
| „ 138 „ 10 z dołu | funkcji | funkcyj. |
| „ 142 „ 9 „ „ | $\Sigma_2$ | $\Sigma_1$ |
| „ 144 „ 9 „ „ | $i = 1, 2, \ldots, n; k \neq i)$ | |
| | ma być $i, k = 1, 2, \ldots, n; k \neq i)$ | |
| „ 146 „ 15 z góry | $\sim \Pi_1 \vee \sim \Pi_2 \vee \ldots \vee \Pi_n . \supset . \sim \Sigma_1 \vee \sim \Sigma_2 \vee \ldots \Sigma_n$ | |

ma być $\sim \Pi_1 \vee \sim \Pi_2 \ldots \vee \sim \Pi_n . \supset . \sim \Sigma_1 \vee \sim \Sigma_2 \vee \ldots \vee \sim \Sigma_n$.

| | zamiast | ma być |
|---|---|---|
| Str. 151 w. 11 z dołu | jest wzięcie | jest to wzięcie. |
| „ 152 „ 6 „ „ | $a + b - 2ab \geqq 0$ | $a^2 + b^2 - 2ab \geqq 0$. |
| „ 156 „ 17 „ „ | $ab - xy = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 - z^2 = z^2}{4} \frac{}{4} \geqq o$ | |

ma być $ab - xy = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 - z^2}{4} = \frac{z^2}{4} \geqq 0$.

---

# WSTĘP.

W dawnych czasach, uczeni znali się na logice i wiele się nią zajmowali. Ale w epoce Odrodzenia powstał prąd zwracający się przeciwko całej filozofji Arystotelesa. Ponieważ zaś w owych czasach nie znano innej logiki, jak tylko tę, która jest wyłożoną w jego Organonie, więc też ofiarą wspomnianych dążności padła między innemi logika. Stan ten aż do ostatnich czasów nie zmienił się na lepsze. Powodem tego jest fakt, że, jak powiada Kartezjusz („Rozprawa o metodzie“): „Mimo, iż logika zawiera w istocie wiele przepisów bardzo prawdziwych i bardzo dobrych, jest w niej wszelako, zamieszanych pomiędzy owe, tyle innych, szkodliwych lub zbytecznych, że prawie równie trudno jest wydzielić je, co wydobyć Dianę lub Minerwę ze złomu marmuru, w którym nawet nie jest jeszcze naszkicowana“. Dotyczy to przedewszystkiem logiki tradycyjnej. Istotnie, zawiera ona najrozmaitsze rzeczy, nie mające nic wspólnego z właściwą logiką; można tam znaleźć uwagi należące do dziedziny metafizyki, psychologji, teorji poznania, gramatyki, językoznawstwa i t. d.

Obojętność ogółu uczonych względem logiki uważamy za fatalną dla nauki. Wprawdzie zarozumiałość ludzka kreśli wspaniały obraz nauki, który zabarwia się jeszcze jaskrawiej w literaturze popularnej. Stąd powstaje szeroko rozpowszechniony i wielce szkodliwy, bo fałszywy, pogląd na naukę i uczonych. Szybki rozwój nauk, zwłaszcza przyrodniczych, w ciągu ostatniej doby. tudzież całkiem nieoczekiwane zastosowania techniczne tych nauk, zdają się potwierdzać ów pogląd optymistyczny. Przysłuchajmy się jednak głosom nielicznym wprawdzie, ale pochodzącym od genjalnych bezsprzecznie uczonych, którzy mieli tyle trzeźwości, by widzieć jasno rzeczy, i tyle odwagi, by sądy swoje wypowiadać.

Już w wieku XVII Leibniz, przerażony nawałem wciąż ukazujących się prac naukowych, z pośród których, z natury rzeczy,

niewielka tylko ilość ma jakąkolwiek wartość, wypowiadał obawę, by ludzkość, jeśli tak pójdzie dalej, nie wpadła w stan barbarzyństwa, („ne studiorum taedio barbaries reducatur“). Cóż powiedziałby, gdyby żył obecnie, kiedy każdy pisze a nikt nie czyta!? Aby zrozumieć całą głęboką i straszną prawdę słów Leibniza, trzeba tylko postawić sobie pytanie: dla kogo to się wszystko pisze i drukuje? Kto w stanie jest z tej powodzi prac wyłowić to, z czego może skorzystać, co ma jakąś istotną i trwałą wartość? 24 godzin doby nie starczy na najpowierzchowniejsze przejrzenie tego, co się drukuje n. p. wyłącznie w matematyce czystej. Pozostaje chyba dać pokój literaturze i nic nie czytać. Tak też jest w istocie: prawie nikt nic nie czyta, każdy zaledwie przegląda to, co w najściślejszym stoi związku z jego własną pracą.

Byłby na to tylko jeden środek, mianowicie, w ogłaszaniu prac naukowych stosować dewizę Gaussa: „pauca sed matura“, której on sam tak ściśle się trzymał, że niektóre z największych jego odkryć ogłoszone zostały dopiero po jego śmierci.

Nie będziemy tu mówili o próżności ludzkiej, bo kazania na ten temat nic nie pomogą. Chodzi nam o wykazanie mniej jawnych przyczyn opłakanego stanu nauki. Są to: ogromna zawiłość i trudność badań i bezgraniczna trudność jasnego wykładu. Każdy może to sprawdzić własnem doświadczeniem, ale to nie wystarcza, kto bowiem nie jest dostatecznie zarozumiałym, ten przypisze napotykane trudności swojej niezdolności, mniemając, iż inni pokonywują je z łatwością; tembardziej, że sporo znajdzie się ludzi, którzy, ukrywając swoje mozoły, udają, iż to wszystko przychodzi im łatwo, albo też tak powierzchownie rzeczy biorą, że istotnych trudności nie dostrzegają. Trudności te są jednak wielkie. Jeden z największych myślicieli matematycznych N. H. Abel, świadczy o tem w swych listach najwyraźniej: w jednym z nich zapowiada on, iż poświęci wszystkie swe siły, aby rozświetlić nieco mroki, jakie panują w analizie. W drugim liście uskarża się na ogromną trudność pisania o rzeczach, któremi się zajmuje. Jeszcze w innym liście, chcąc scharakteryzować nadzwyczajne trudności, jakie napotkał w pewnem miejscu swych badań algebraicznych, powiada, iż sam djabeł się miesza do tej sprawy. Jeden z największych matematyków niemieckich, C. G. J. Jacobi, mówi co następuje: „Gorzką jest praca, której dokonałem, gorzką też jest ta praca, którą obecnie jestem zajęty. Nie pilność i nie pamięć prowadzą tu do celu, są to

najniższe służebnice czynnego, czystego myślenia; ale uporczywe, mózg rozsadzające rozważanie, które wymaga więcej sił, niż najwytrwalsza pilność. Jeżeli mi się więc udało przez ciągłe ćwiczenie rozwagi dojść do pewnej w tem wprawy, to niech nikt nie sądzi, iż przyszło mi to łatwo, przez jakiś szczęśliwy, naprzykład, dar przyrodzony. Gorzką, gorzką pracę musiałem wytrzymać i strach przed myśleniem często potężnie wstrząsał mojem zdrowiem". Sądzimy, iż te dwa świadectwa, wydane przez prawdziwie genjalnych matematyków, wystarczają dla potwierdzenia myśli, którą wypowiedzieliśmy.

Strasznie więc są zawiłe i trudne badania naukowe, a zwłaszcza matematyczne. Lecz nie wiemy, czy nie trudniejszym bodaj jest jasny wykład tych badań. Czytanie książki matematycznej dla człowieka, który chciałby ją zrozumieć do końca jest niekiedy rodzajem katuszy nie do zniesienia. Pewnego razu, wśród zupełnej ciszy czytelni matematycznej jednego z uniwersytetów niemieckich rozległ się głośny trzask; wszyscy zwrócili się w stronę, skąd wychodził i ujrzeli niemłodego już, poważnego człowieka, który bił książką w stół: wpadł on w gniew taki, nie mogąc żadną miarą zrozumieć myśli autora! Bo też autorowie posiadają sposoby, które istotnie czytelnika mogą wyprowadzić z cierpliwości. Najskuteczniejszym z nich jest u matematyków słówko „oczywiście". Jeden z uczonych angielskich powiada, że kiedy spotykał ten wyraz w słynnem dziele Laplace'a o teorji prawdopodobieństwa, wiedział już, że będzie go to kosztowało godziny, dni, a może i miesiące namysłu. Pochodzi to stąd, iż autorowie używają tego wyrażenia przedewszystkiem wtedy, gdy rzecz jest o tyle niejasną, że, jakkolwiek przekonani są o słuszności tego, co twierdzą, jednak albo wcale nie umieją tego dowieść, albo też znają tylko tak długie i niezgrabne dowody, że się ich wstydzą. Do tego trzeba dodać, że w książkach matematycznych zwykle w miejscach najtrudniejszych pojawia się omyłka w druku, aby dopełnić miary utrapienia czytelnika. Nie jest to rzecz przypadkowa: zecer, nie rozumiejący wywodów matematycznych, rozsiewa dość równomiernie błędy drukarskie, ale autor, czytając korektę zwykle nie dostrzega błędu w ustępie, którego wskutek trudności już nie pamięta i nie rozumie.

Stan obecny nauki nie jest więc tak świetnym, jakby się zdawało. Pozostaje więc pytanie, gdzie jest droga wyjścia? Co może uczynić badanie łatwiejszem i wykład jaśniejszym? I dziś, jak

dawniej, nie brak na niwie naukowej utalentowanych, a nawet genjalnych pracowników. Nie odczuwa się więc braku tej intuicji i fantazji twórczej, bez której żadne badanie odbywać się nie może. Czegóż więc brakuje? Odpowiedź, naszem zdaniem, może być tylko jedna: Brakuje logiki, brakuje tego narzędzia, które jedno może wyplenić chwasty na polu naukowem i drogą analizy skracać i kondensować ten przeogromny materjał, który daje twórczość naukowa. Logika jest jedynym środkiem otrzeźwiającym badacza, wskazującym mu normy ważności tematu i dojrzałości jego pracy.

Celem niniejszej książki jest udzielenie Czytelnikowi tego minimum przygotowania logicznego, jakie uważamy za konieczne dla badań naukowych. Zwraca się ona przedewszystkiem do matematyków; sądzimy jednak, że kwestje tutaj poruszone mają wielką doniosłość dla całej nauki i nie powinny dla nikogo być zupełnie obojętne. Wykład nasz będzie miał postać historyczną, ponieważ, jak sądzimy, w tej postaci będzie on najłatwiej zrozumiałym. Nie będzie jednak tutaj historja występowała jako cel sam w sobie, ale jako środek dydaktyczny. W ten sposób przejdziemy rozwój logiki od czasów greckich aż do lat ostatnich.

Pierwszy tom niniejszego dzieła zawiera wykład logiki tradycyjnej czyli klasycznej, wywodzącej się od Arystotelesa. Jest on jednak poprzedzony wstępem ogólnym, mającym dać pewne pojęcie o celu, do którego dążymy, tudzież krótkim rysem historycznym całości; ostatnie cztery rozdziały stanowią przygotowanie do logiki nowszej, zwanej logiką matematyczną lub logistyką. Tej ostatniej będzie poświęconym tom drugi i ostatni tego dzieła.

ROZDZIAŁ I.

# Pogląd na budowę dowodu i nauki dedukcyjnej.

Może się wydać dziwnem, że potrzeba jeszcze dawać pojęcie o budowie nauki dedukcyjnej: przecież już w szkole średniej wykłada się geometrję, która jest jednym z najlepszych przykładów takiej nauki. Napozór jest to rzecz taka prosta i jasna! Okazuje się jednak, że nietylko większość ludzi wykształconych, ale nawet bardzo często wybitni uczeni, nie mają zrozumienia dla istoty nauki dedukcyjnej. Postaramy się zatem dać obraz ogólnej budowy takiej nauki i to dwojaki, że się tak wyrazimy, statyczny i dynamiczny, t. j. obraz gotowej nauki dedukcyjnej i obraz jej powstawania, wzgl. dalszego rozwoju.

Za przykład może służyć geometrja. Ze strony zewnętrznej jest to pewien układ zdań, powiązanych między sobą przy pomocy t. zw. dowodów. Jeżeli książkę, zawierającą wykład tej nauki, weźmiemy w przekładzie na inny język, to zdania, z których się składa, będą zupełnie inne. Jest jednakże coś, co się przytem nie zmieni. Ten niezmiennik, to jest treść zdań, czyli, jak mówił Bolzano [1]), zdanie w sobie, coś, co nie zależy od tego, kto i kiedy je wypowiada, a nawet od tego, czy ktokolwiek kiedykolwiek je wypowie. Jest to ta rzecz nieuchwytna, z którą ma do czynienia nauka dedukcyjna. Nie będziemy się tutaj zajmowali pytaniem, co to jest właściwie treść zdania czy symbolu? Pozwolimy sobie tylko przytoczyć zdanie, które, o ile nam wiadomo, po raz pierwszy wypowiedział logik amerykański Peirce. Sądzi on, że treści naszych symboli nie są niczem innem, jak tylko wyrazami naszych przeżyć

[1]) Bernard Bolzano, zob. niżej Rozdz. III.

czy też wskazówkami postępowania. Gdy n. p. zapytamy się, co to jest dom lub ulica, okaże się, że każda definicja jest właściwie niewystarczającą; natomiast, gdy komuś powiemy, że pan X mieszka w domu pod takim a takim numerem na ulicy takiej a takiej, nasz interlokutor to zrozumie, t. j. potrafi odnaleźć pana X.

Zajmując się w dalszym ciągu jedynie zdaniami w sobie, abstrahować będziemy od wszelkich zagadnień psychologicznych i metafizycznych. Jeżeli w ten sposób wyzwoliliśmy się z więzów metafizyki i psychologji, to nie znaczy jeszcze, abyśmy byli wolni. Czeka nas najcięższa sprawa, bo sprawa z teorją poznania, z zagadnieniem, co jest zdaniem prawdziwem a co jest zdaniem fałszywem. Będziemy się starali i tego pytania nie poruszać. Dla nas właściwie wystarczy wiedzieć, że wszystkie zdania podzielone są na dwie kategorje: zdań prawdziwych i fałszywych. Kategorje te posiadają pewne własności, któremi niżej zajmować się będziemy. Nasze rozważania będą miały zatem charakter formalny. Możnaby oczywiście postawić pytanie, dlaczego ograniczać się do strony formalnej a ignorować inne strony zagadnień? — Otóż niewątpliwie te inne strony są bardzo ważne, ale o tem my prawie nic pewnego nie potrafimy powiedzieć; zresztą są to rzeczy całkiem różne od tego, czem się tutaj zajmujemy.

Weźmy do ręki jakikolwiek szkolny podręcznik geometrji, albo lepiej Elementy Euklidesa, które jeszcze dziś dokładniejsze są od zwykłych książek szkolnych. Zobaczymy tedy, iż nauka ustanawia pewne związki logiczne pomiędzy twierdzeniami, w jej skład wchodzącemi. Jeśli się naszej książce bliżej przyjrzymy, spostrzeżemy, iż przy ustalaniu dalszych twierdzeń opieramy się na poprzednich. Od danego twierdzenia, cofając się coraz dalej, dochodzimy do twierdzeń przyjętych bez dowodu; jest to oczywiście konieczność, ponieważ ten łańcuch dowodów i twierdzeń musi się gdzieś kończyć. W osnowie zatem nauki leżą zdania, przyjęte bez dowodu. Charakterystycznem jest więc to, że nauka wychodzi ze zdań, przyjętych bez dowodów, a na ich podstawie otrzymuje dalsze zdania — twierdzenia. Wszystkie te zdania są wyrażone w postaci symbolicznej. Używamy zatem w nauce pewnych symboli, pewnych terminów naukowych. Zwróćmy się n. p. do terminu „kwadrat". Określamy czyli definjujemy go jako prostokąt równoboczny, wyrażając go temsamem przy pomocy innych terminów, które, w danym razie, uważamy za znane. Podobnie więc, jak sprowadzamy kolejno

jedne twierdzenia do drugich, tak też sprowadzamy jedne terminy naukowe do drugich, wcześniejszych terminów. Do tego właśnie służą definicje, ale, podobnie jak w tamtym przypadku, i tutaj musimy się gdzieś zatrzymać. Podobnie więc, jak istnieją zdania, przyjęte bez dowodu, tak też istnieją terminy, przyjęte bez definicji; są to t. zw. terminy prymitywne.

Cała więc nauka opiera się na pewnych zdaniach, przyjętych bez dowodu. Są one dwojakiego gatunku. Te zdania pierwszego gatunku nazywane są dość rozmaicie: aksjomatami, postulatami. pewnikami i t. d.; mówi się o nich często, iż sa one jasne, oczywiste — ale to nie ma dla nas znaczenia. Najczęściej w wykładach geometrji przyjmuje się za postulat n. p. między innemi zdanie:

„Jeżeli dwie proste mają dwa różne punkty wspólne, to te proste się zlewają“.

Myśl tę można, naturalnie, w rozmaity sposób wyrażać; możemy więc krócej powiedzieć:

„Przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta“.

Ale można i tego dowodzić, wychodząc oczywiście z odpowiednich założeń. Niema zatem nigdy konieczności zatrzymywania się przy jakimś jednym układzie postulatów; trzeba tylko jeden z nich wybrać.

Drugą kategorję zdań, przyjmowanych bez dowodu, stanowią wspomniane już przez nas definicje. Pojęcie definicji jest dość zawiłe; zajmował się niem między innymi matematyk włoski Giuseppe Peano i jego szkoła. Do tego pojęcia nieraz jeszcze powrócimy. Narazie niechaj nam wystarczy, że definicja jest równością logiczną, którą przyjmujemy jako umowę. Mówimy n. p.:

„Kwadrat jest to prostokąt równoboczny“.

Definicja ta, taksamo jak każda inna definicja, jest wynikiem połączenia dwóch twierdzeń wzajemnie odwrotnych. W danym razie części te są następujące:

1° Kwadrat jest prostokątem równobocznym.

2° Prostokąt równoboczny jest kwadratem.

Żadne z tych zdań zosobna definicją być nie może. Dopiero połączenie ich, do czego w języku polskim służy wyrażenie „jest to“, stanowi pełną definicję.

Takie są zasady, na których opiera się budowa nauki dedukcyjnej. Dzięki niezrozumieniu tych tak prostych myśli powstają owe dyskusje bez końca, w których nikt nikogo przekonać nie może.

Spotykamy je nietylko w polityce. gdzie wchodzą w grę interesy osobiste i zbiorowe, ale także w nauce. Skąd to pochodzi? Analiza logiczna argumentacji wykazałaby zawsze to, do czego niekiedy obie strony po dłuższym czasie dochodzą, mianowicie, że ci, którzy się spierają, przyjmują różne postulaty; nic dziwnego, że wyniki zgodzić się nie mogą! Analiza taka jest ćwiczeniem bardzo zajmującem, ale też połączonem ze znacznemi trudnościami, gdyż całe nasze rozumowanie ma charakter silnie intuicyjny, w szczególności zaś postulaty, na których ono się opiera, przyjmowane są najczęściej podświadomie.

Kwestja, na jakiej zasadzie przyjmujemy postulaty, a zarazem co to znaczy, że przyjmujemy jakiś postulat, splata się z teorją poznania i metafizyką, z tą pierwszą w szczególności przez pojęcie prawdy i fałszu, albowiem, przyjmując jakieś twierdzenie, my zapewniamy tylko o jego prawdziwości. Co to jest ta prawdziwość? Arystoteles powiada, że jest to zgodność z rzeczywistością. Ale co to jest rzeczywistość? Pytanie to jest trudne i zawiłe niezmiernie. Nas zresztą zajmuje tylko związek logiczny, jaki łączy postulaty z poszczególnemi twierdzeniami danej teorji.

To właśnie pojęcie jest najkardynalniejszem dla całej nauki i na niem skupić musimy całą naszą uwagę. Cóż to jest zatem za związek? Napróżnobyśmy szukali dokładnej odpowiedzi na to najważniejsze w logice pytanie w traktatach, poświęconych temu przedmiotowi, jakkolwiek każdy z nich daje tę lub ową odpowiedź. Najlepszą z tych odpowiedzi jest, naszem zdaniem, odpowiedź Arystotelesa, która zawiera się w jego określeniu syllogizmu. Oto jest dosłowne brzmienie tego określenia[1]: „Syllogizmem jest taka myśl (mowa), w której, jeżeli coś jest wypowiedziane, coś innego z konieczności wynika i wynika tylko z tego, że to coś zostało założone. Przez dodatek „tylko z tego, że to coś zostało założone“ pojmuję, że z założonego tylko wynika, t. j. że nie wymaga żadnego innego terminu, żadnego dalszego oznaczenia, aby to, co jest konieczne, ujawniło się“. Związek zatem, o który nam chodzi, polega na tem, że przyjmując jedno, my tem samem przyjmujemy, a raczej zmuszeni jesteśmy przyjąć, drugie. Arystoteles, rozumiejąc doniosłość wyrażenia „tem samem“ objaśnia je, mówiąc, że nic innego, oprócz

[1]) Cytujemy podług przekładu, jaki podaje Biegański w swem dziele p. t. „Teorja logiki“.

przyjęcia pierwszego zdania, nas do tego nie przymusza. Ale nie wyjaśnia on bynajmniej, w jaki sposób my, pojmując jedno, tem samem zmuszeni jesteśmy przyjąć drugie. Cudowny to jednak związek, nie opierający się na żadnym gwałcie, na żadnem prawie karnem, ani na żadnej powadze; on tkwi w nas samych! Trzeba żywić w sobie i utwierdzać poczucie tego związku, trzeba wypracowywać w sobie czułość i wrażliwość nań!

Związek logiczny ujawnia się bliżej na przykładach. Podamy więc kilka przykładów, możliwie najprostszych. Nie są to jeszcze te przykłady, które na końcu będziemy w stanie podawać; chcemy tylko dać pewne pojęcie o tem, czego szukamy i wyjaśnić nieco dokładniej, jak to jest, że przyjmując coś jednego, zarazem przyjmujemy coś drugiego. Niech zatem będą

$$a,\ b,\ c,\ d$$

jakiekolwiek liczby. Symbolika ta niezupełnie odpowiada naszej myśli, nam bowiem chodzi o jakąkolwiek pierwszą, jakąkolwiek drugą liczbę i t. d., nie zaś o pewne określone liczby.

Są to zatem niejako puste miejsca, za które wolno nam wstawiać jakiekolwiek liczby. Ale do niektórych miejsc musimy podstawiać te same liczby, do innych możemy wstawiać inne. Tego zaś nie umiemy wyrażać inaczej, jak tylko zapomocą takich właśnie określonych liter czy innych, podobnych znaczków. Za tęsamą literę musimy więc wszędzie w danym zapisie wstawiać tę samą liczbę, za różne litery zaś wolno nam wstawiać różne liczby. Mamy tutaj do czynienia z pojęciem zmiennej czyli indeterminaty, należycie zanalizowanem i wyjaśnionem dopiero przez matematyka niemieckiego, G. Fregego.

Prócz liter oznaczających zmienne używać będziemy zwykłych symboli arytmetycznych, a nadto wprowadzonego przez prof. Gius. Peano znaku

$$\supset,$$

zastępującego słowo „wynika". Znak ten wyraża zdanie warunkowe i oddziela poprzednik, położony na lewo od niego, od następnika, położonego na prawo. Znak ten nazywamy często znakiem wynikania, gdyż z poprzednika wynika następnik, t. j. przyjmując poprzednik, tem samem przyjmujemy następnik. Wreszcie zamiast nawiasów używać będziemy o wiele od nich dogodniejszej punktacji, t. j. osobnych punktów i grup punktów dla oddzielania poszczegól-

nych części zdania. Zasada jest ta, że największa ilość punktów wskazuje podział główny. W ten sposób zdanie jest podzielone na dwie części, do każdej z nich stosuje się znowuż tasama zasada i t. d. A zatem zapis

$$a = b \,.\, b = c : \supset : a = c$$

będzie wyrażał zdanie składające się z dwóch części

$$a = b \,.\, b = c \quad \text{i} \quad a = c,$$

przyczem pierwsza z nich jest poprzednikiem a druga następnikiem zdania warunkowego. Poprzednik sam składa się również z dwóch części

$$a = b \quad \text{i} \quad b = c.$$

oddzielonych od siebie tylko punktem, bez żadnych innych symboli; w tym przypadku zastępuje on słówko „i“. Wobec tego, cały nasz zapis oznacza co następuje: „Jeżeli jest $a = b$ i $b = c$, to będzie $a = c$“.

Dla zmniejszenia wszakże ilości punktów w naszych wzorach, która przy zawilszych kombinacjach mogłaby być znaczną, wprowadzimy odrazu umowę, na mocy której punktom, położonym przy znaku wynikania, przypisywać będziemy większą niejako wartość, niż wszystkim innym, a zatem, jeżeli podział główny znajduje się przy znaku wynikania, mamy prawo jeden z punktów obok niego odrzucić. W ten sposób poprzednio przez nas rozważane twierdzenie zapisać możemy nieco krócej, jak następuje:

1. $$a = b \,.\, b = c \,.\supset .\, a = c$$

W wypadkach, gdy będziemy mieli obok siebie kilka równorzędnych członów zdania, oddzielać je będziemy, dla uproszczenia, tą samą ilością kropek; jest bowiem rzeczą obojętną, gdzie najpierw zaczniemy dzielić. Umowa ta jest zupełnie podobną do umowy, przyjętej w arytmetyce, a pozwalającej opuszczać nawiasy w sumie lub iloczynie kilku elementów. Wobec tego możemy zdanie: „Jeżeli jest $a = b$, $b = c$ i $c = d$, to będzie $a = d$“ napisać w postaci następującej:

2. $$a = b \,.\, b = c \,.\, c = d \,.\supset .\, a = d$$

Zadajmy sobie teraz pytanie, czy pomiędzy twierdzeniami 1 i 2 nie zachodzi jaki związek logiczny, czy może, przyjmując jedno z nich, nie musimy zarazem przyjąć i drugiego? Czy w ta-

kim razie nie można dowieść drugiego, opierając się na pierwszem? Oczywiście, można to uczynić. Przytoczymy najpierw dowód taki, jaki moglibyśmy znaleźć w szczegółowym wykładzie matematycznym.

Przypuśćmy zatem, że mamy

$$a = b \,.\, b = c \,.\, c = d\,;$$

okażemy, iż wówczas zachodzi także równość

$$a = d.$$

W rzeczy samej, z równości:

$$a = b \text{ i } b = c,$$

wynika, na zasadzie twierdzenia 1. związek

$$a = c.$$

Mamy zatem

$$a = c \text{ i } c = d,$$

podobnie jak w poprzedniku wzoru 1. Różnica polega tylko na tem, że użyto innych liter; jak już widzieliśmy, jest ona zupełnie nieistotną. Możemy więc we wzorze 1. zastąpić litery

$$b \text{ i } c$$

odpowiednio przez

$$c \text{ i } d$$

nie zmieniając przez to jego właściwej treści. Mamy więc związek

$$a = c \,.\, c = d \,.\supset .\, a = d.$$

przy pomocy którego wnioskujemy

$$a = d,$$

co było do okazania.

Dowód ten jest jednak dla naszych celów niedość jasny. Zapiszemy go przeto w postaci dopuszczającej dokładniejszą analizę, mianowicie w postaci redukcyjnej, która jest wyrazem szukania dowodu. Zakładamy więc znowu, iż zadano nam określone, choć dowolne liczby, $a$, $b$, $c$, $d$ spełniające związki

$$a = b, \; b = c, \; c = d\,;$$

trzeba dowieść, że wówczas jest także:

$$a = d.$$

Zaznaczyć należy, iż rozpoczynając dowód zmieniamy nasz sposób patrzenia na powyższe litery: w wzorach 1 i 2 są to zmienne w całem tego słowa znaczeniu. Tutaj, przeciwnie, postępujemy tak, jak gdybyśmy mieli do czynienia, w ciągu całego dowodu, z stałemi, które oznaczyliśmy literami

$$a,\ b,\ c,\ d.$$

Stałe te są wszakże dowolne, z tem tylko zastrzeżeniem, by spełniały związki

$$a = b,\ b = c,\ c = d.$$

Przed tem, co ma być udowodnione, piszemy znak poszukiwania dowodu

$$\begin{array}{r|l} & a = d, \\ \hline \leftarrow & \end{array}$$

i zauważamy, że, gdybyśmy mieli

$$a = c,\ c = d,$$

to mielibyśmy także

$$a = d$$

na podstawie twierdzenia 1. Aby się o tem przekonać, wystarczy za zmienne

$$a,\ b,\ c$$

w twierdzeniu 1 podstawić odpowiednio stałe, choć dowolne liczby, które oznaczyliśmy literami

$$a,\ c,\ d,$$

wówczas bowiem poprzednik tego twierdzenia przybrałby postać:

$$a = c\,.\,c = d,$$

zaś następnik byłby

$$a = d.$$

Aby więc udowodnić to, o co nam chodzi, wystarcza mieć

$$a = c \text{ i } c = d.$$

Piszemy zatem:

$$\begin{array}{r|l} a = c & a = d \\ c = d & \\ \hline [b, c \mid c, d]\ 1. \leftarrow & \end{array}$$

To jest pierwszy krok redukcji: cofamy się od tego, co trzeba udowodnić, ku temu, co jest dane. Pamiętamy bowiem, iż mamy z założenia

$$c = d.$$

t. j. uważamy tę równość za daną. Zapiszemy to w naszym schemacie redukcji, pisząc przed tą równością strzałkę wskazującą na literę D. Schemat nasz wygląda teraz jak następuje:

$$\begin{array}{r|l}
 & a = c \quad\quad a = d \\
D \leftarrow & c = d \\
\hline
[b, c & c, d]\ 1. \leftarrow
\end{array}$$

Do udowodnienia pozostaje jeszcze równość

$$a = c,$$

która bezpośrednio daną nie jest; piszemy więc znowu przed nią znak redukcji i zwracamy uwagę, że, gdybyśmy mieli

$$a = b \text{ i } b = c,$$

to, na podstawie twierdzenia 1., podstawiając za zmienne

$$a,\ b,\ c,$$

dowolne stałe, oznaczone temi samemi literami, moglibyśmy wywnioskować

$$a = c$$

To jest drugie ogniwo redukcji. W ten sposób sprowadziliśmy równość

$$a = c$$

do dwóch równości, które już nam są dane. Pośrednio zatem sprowadziliśmy równość

$$a = d$$

do równości danych i tem samem dowód doprowadziliśmy do końca. Całkowity schemat dowodu ma postać:

$$\begin{array}{r|l}
D \leftarrow & a = b \\
D \leftarrow & b = c \\
\hline
 & 1. \leftarrow
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & a = c \\
D \leftarrow & c = d \\
\hline
[b, c & c, d]\ 1. \leftarrow
\end{array}
\qquad a = d$$

Należy jednak pamiętać o tem, że jest w tem jeszcze pewna niedokładność, należałoby bowiem używać innych liter dla oznaczania zmiennych a innych — dla oznaczania tych dowolnych stałych, któremi je zastępujemy w czasie dowodu. Nie będzie z tem wszakże

zbyt wielkich trudności, jeśli pamiętać będziemy, iż z dowolnemi stałemi mamy do czynienia jedynie w czasie dowodu; gdy twierdzenie udowodniliśmy, mamy znowu zmienne, bo udowodniliśmy je dla jakichkolwiek liczb.

Udowodniliśmy zatem, że z twierdzenia 1. wynika twierdzenie 2. Może to jednak nastręczyć pewne wątpliwości: co to znaczy, że, jeżeli prawdziwem jest twierdzenie 1., to prawdziwem jest i drugie? Przecież oba są prawdziwe! Aby to wyjaśnić, zwrócimy się teraz do ogólniejszego, choć podobnego przykładu. Dla większej wyrazistości oznaczać będziemy przytem innemi literami zmienne, a innemi literami — te dowolne stałe, któremi operujemy w czasie dowodu. Obecnie

$$x, y, z, t$$

oznaczać będą te zmienne, za które wolno nam podstawiać dowolne przedmioty. Przez $R$ zaś oznaczymy dowolną relację czyli stosunek. Rozważajmy teraz twierdzenia, wyrażające się wzorami:

1'. $$xRy \,.\, yRz \,.\supset .\, xRz$$
2'. $$xRy \,.\, yRz \,.\, zRt \,.\supset .\, xRt \,.$$

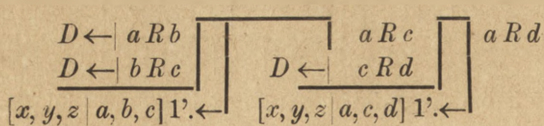
Powiadamy, iż drugie z nich wynika z pierwszego, t. j., jeżeli prawdziwem jest pierwsze twierdzenie, to prawdziwem jest także twierdzenie drugie. Uważajmy więc twierdzenie 1'. za prawdziwe, a na jego podstawie spróbujmy udowodnić twierdzenie 2'.: w tym celu za zmienne

$$x, y, z, t$$

podstawiamy dowolne, chociaż stałe, przedmioty,

$$a, b, c, d,$$

spełniające poprzednik twierdzenia 2'.; udowodnimy jego następnik. Postępując zupełnie podobnie, jak poprzednio, wykonamy redukcję, która wyrazi się następującym schematem:




W ten sposób udowodniliśmy nasze twierdzenie dla stałych

$$a, b, c, d;$$

ale one są dowolne. Wobec tego możemy te stałe zastąpić pierwotnemi zmiennemi. Mamy więc:

$$xRy \,.\, yRz \,.\, zRt \,.\supset .\, xRt,$$

co było do okazania.

Odpadła teraz trudność z wyrazem „jeżeli", bo twierdzenie 1'. niekoniecznie musi być prawdziwem. Będzie ono wprawdzie prawdziwem jeżeli litery

$$x,\ y,\ z,\ t$$

uważać będziemy za przedstawiające zmienne liczbowe, zaś literę $R$ za znak arytmetycznej równości, większości lub mniejszości. Natomiast nie będzie ono prawdziwem, jeśli zachowamy interpretację zmiennych

$$x,\ y,\ z,\ t$$

a relację R uważać będziemy za nierówność, albo też, jeśli umówimy się, iż za zmienne podstawiać będziemy rozmaitych ludzi a relację R rozumieć będziemy jako stosunek znajomości pomiędzy tymi ludźmi.

To wszystko jednak, co powiedzieliśmy, nie byłoby dostatecznie jasnem, gdybyśmy poprzestali na jednym przykładzie. Podamy więc drugi przykład, zaczerpnięty z teorji działań w arytmetyce i dotyczący związków, które nie są dobrze wyjaśniane w szkole. Posługiwać się będziemy przytem dwoma symbolami, wprowadzonemi przez Peano

$$\varepsilon \text{ i } q$$

Pierwszy z nich czytamy: „jest"; drugi z nich oznacza ogół liczb rzeczywistych. Do pojęcia, które przedstawia symbol $\varepsilon$ jeszcze powrócimy; narazie wystarczy wiedzieć, że zespół symboli:

$$x \,\varepsilon\, q$$

będziemy rozumieli: „$x$ jest liczbą rzeczywistą".

Możemy teraz napisać twierdzenie, które zamierzamy udowodnić

$$x\varepsilon q \,.\, y\varepsilon q \,.\supset .\, \{(x+y)-y\} = x;$$

czytamy je jak następuje: „Jeżeli $x$ jest liczbą rzeczywistą i $y$ jest liczbą rzeczywistą, to zachodzi równość

$$\{(x+y)-y\} = x".$$

Zazwyczaj opuszcza się te nawiasy, my jednak, dla większej jasności, takich nawiasów opuszczać nie będziemy.

Przesłanki, na których dowód będzie się opierał, są następujące:

1. $x\varepsilon q . y\varepsilon q . \supset . x + y\varepsilon q$
2. $x\varepsilon q . y\varepsilon q . z\varepsilon q . x + z = y + z . \supset . x = y$
3. $x\varepsilon q . y\varepsilon q . \supset . x - y\varepsilon q$
4. $x\varepsilon q . y\varepsilon q . \supset (x - y) + y = x$

W szkole średniej nie mówi się o takich przesłankach, jak 1. i 3.; my jednak pominąć ich nie możemy, tem bardziej, że przesłanki tego rodzaju niezawsze są prawdziwe: gdyby n. p. chodziło o liczby nieujemne, to przesłanka 3. byłaby fałszywą. Odnośnie do przesłanki 4. zauważyć należy, iż stanowi ona definicję odejmowania. Różni się ona od twierdzenia, które mamy udowodnić, tylko porządkiem znaków + i —. Ktoś nieobeznany z matematyką mógłby się zapytać, czy to nie wszystko jedno, najpierw odjąć $y$ od $x$ a potem je dodać, czy też zrobić to samo w odwrotnym porządku. Czy twierdzenie nasze nie wynika bezpośrednio z przesłanki 4? Okazuje się jednak, że tak nie jest: istotną rolę odgrywa tutaj przesłanka 2., jakkolwiek wielu matematyków nie zdaje sobie z tego sprawy. Rozważmy tę przesłankę dokładniej; możemy ją ująć w innej postaci: „jeżeli $x$, $y$, $z$, są liczbami rzeczywistemi i

$$x \neq y,$$

to

$$x + z \neq y + z\text{“}.$$

Innemi słowy: „Jeśli w sumie dwóch liczb rzeczywistych zastąpię pierwszy składnik przez nierówną mu liczbę rzeczywistą, a drugi pozostawię bez zmiany, to suma się zmieni“. Twierdzenie powyższe rozstrzyga pytanie, czy różnica dwóch liczb rzeczywistych jest w zupełności określoną przez te liczby, które od siebie odejmujemy. Że wynik działania niekoniecznie musi być jednoznacznie określony, poucza nas już przykład pierwiastkowania, albowiem pierwiastek stopnia parzystego z liczby dodatniej (w zakresie liczb rzeczywistych) dopuszcza dwie wartości, różniące się znakiem. O tem, że dla odejmowania nic podobnego zachodzić nie może, poucza nas właśnie przesłanka 2. Opierając się na przesłankach 2. i 4. podać możemy dowód naszego twierdzenia taki, jaki spotkać można w dobrej książce matematycznej.

W rzeczy samej, niech $a$ i $b$ będą dwie dowolne (ale

stałe!) liczby rzeczywiste; wówczas, podług definicji odejmowania, różnica

$$\{(a+b)-b\}$$

jest to taka liczba, że, dodawszy do niej $b$, otrzymujemy

$$(a+b).$$

Ale taką liczbą jest właśnie $a$! Czyż tem samem twierdzenie nie byłoby udowodnionem? Oczywiście, że nie, bo trzeba wiedzieć, że jest tylko jedna taka liczba. O tem wszakże poucza nas przesłanka 2. Dzięki więc tej przesłance mamy prawo napisać

$$\{(a+b)-b)\}=a.$$

Pamiętając, że tę równość udowodniliśmy pod warunkiem, że stałe $a$ i $b$ są liczbami rzeczywistemi, osiągnięty wynik zapisujemy w postaci następującej:

$$a\varepsilon q.b\varepsilon q.\supset.\{(a+b)-b\}=a.$$

Udowodniliśmy to dla stałych; ale te stałe są dowolne. Możemy więc zastąpić je przez zmienne, które oznaczymy n. p. literami $x$ i $y$. W ten sposób otrzymujemy twierdzenie, o które chodziło.

Powołujemy się tutaj na przesłanki 2. i 4., pomijając natomiast 1. i 3. jako same przez się zrozumiałe. Skoro wogóle mówi się o liczbach rzeczywistych, zakłada się milcząco, że wszystkie litery, któremi operujemy, oznaczają liczby rzeczywiste i przyjmuje się intuicyjnie, że suma i różnica dwóch liczb rzeczywistych jest również taką liczbą. Nie widać jednak, skąd to wypływa? Przez to właśnie powyższy dowód jest intuicyjny i niedokładny.

Poszukajmy więc dokładniejszego dowodu i to znowu metodą redukcyjną. Zastępujemy znowuż zmienne

$$x \text{ i } y$$

w wypowiedzi twierdzenia dwiema stałemi,

$$a \text{ i } b$$

dowolnemi, byle tylko spełniającemi poprzednik twierdzenia (a więc dwiema dowolnemi liczbami rzeczywistemi). Gdy zaś dla tych stałych udowodnimy nasze twierdzenie, stałe te znikną i będziemy mogli je zastąpić przez pierwotne zmienne.

Aby teraz zrobić pierwszy krok redukcji, musimy wśród naszych przesłanek znaleźć taką, która przy odpowiedniem podstawieniu miałaby następnik identyczny z następnikiem naszego twierdzenia.

Ponieważ ten następnik ma postać pewnej równości, nie możemy wziąć w rachubę ani przesłanki 1. ani przesłanki 3., bo do żadnej z nich nie wchodzi znak równości. Łatwo się też przekonać, że z przesłanki 4. nie zdołamy zrobić wielkiego użytku. Pozostaje więc przesłanka 2. Następnik jej ma postać

$$x = y;$$

wobec tego, musimy podstawić

$$\{(a + b) - b\} \text{ zamiast } x,$$
$$a \qquad\quad \text{ zamiast } y.$$

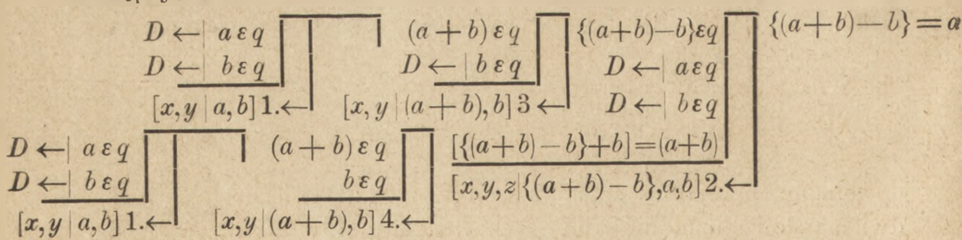
Jest jeszcze w przesłance 2. trzecia zmienna, $z$, która nie wchodzi do następnika; co za nią podstawić? Tu trzeba próbować. Bez próby bowiem w badaniach naukowych się nie obejdzie; dowody twierdzeń bywają zresztą wielorakie, nie jest więc rzeczą z góry wykluczoną, by różne drogi nas mogły doprowadzić do celu. W danym razie okazuje się rzeczą pożyteczną podstawić $b$ na miejsce $z$. Wówczas poprzednik przesłanki 2. przybiera postać

$$\{(a + b) - b\}\, \varepsilon\, q \,.\, a\, \varepsilon\, q \,.\, b\, \varepsilon\, q \,.\, [\{(a + b) - b\} + b] = (a + b).$$

Wystarczy stwierdzić ten poprzednik, aby mieć dowód naszego twierdzenia. Zauważamy jednak odrazu, iż druga i trzecia jego część, t. j.

$$a\, \varepsilon\, q \text{ i } b\, \varepsilon\, q$$

są nam dane, jako części poprzednika twierdzenia, które mamy udowodnić. Pozostaje nam więc do udowodnienia pierwsza i czwarta część; tutaj znowuż będziemy postępowali przez redukcję. Ostatecznie schemat redukcyjny naszego dowodu będzie miał postać następującą:




Cyfry oznaczają, jak poprzednio, przesłanki, na które się powołujemy, nawiasy zaś przy nich — podstawienia. Litery przed kreską pionową wewnątrz nawiasu — są to litery, przedstawiające zmienne, któreto litery zastępujemy innemi literami lub kombinacjami liter, w danym razie przedstawiających dowolne stałe; litery te, wzglę-

dnie ich kombinacje, umieszczamy za wspomnianą kreską poziomą w tym samym porządku, co litery, za które je podstawiamy.

O ile redukcyjna postać dowodu łatwiejszą jest wtedy, gdy chodzi o szukanie dowodu, o tyle, gdy twierdzenie już jest udowodnionem, dogodniejszą jest forma dedukcyjna. Dlatego dowody spotykamy najczęściej w tej ostatniej postaci i my również będziemy zazwyczaj podawali je w postaci dedukcyjnej. Chcemy teraz podany przez nas wyżej dowód przedstawić w tej normalnej postaci. Dowód nasz będzie się przedstawiał w postaci tabeli, złożonej z pojedyńczych wierszy, które, aby móc się na nie powoływać, będziemy oznaczali numerami. Taksamo, jak poprzednio, zastępujemy na czas trwania dowodu, zmienne $x$ i $y$ przez dwie dowolne stałe, $a$ i $b$, spełniające poprzednik naszego twierdzenia, t. j. dwie dowolne liczby rzeczywiste. Dowód zaczniemy teraz od wciągnięcia do tabeli dowodu obu części poprzednika dowodzonego twierdzenia. Jeżeli części te oznaczymy odpowiednio przez $\alpha$ i $\beta$, to będziemy mogli napisać

$$\alpha\,[x \mid a] \mid \rightarrow a\,\varepsilon\,q \tag{1}$$

$$\beta\,[y \mid b] \mid \rightarrow b\,\varepsilon\,q \tag{2}$$

To są pierwsze dwa wiersze dowodu. Jest to tylko wciągnięcie do tabeli pewnych założeń; nie przynosi to zatem jeszcze nic istotnie nowego. Umożliwi nam to jednak wytworzenie pierwszego ogniwa dowodu, mianowicie, jeżeli do przesłanki 1. podstawimy odpowiednio $a$ i $b$ zamiast $x$ i $y$, to poprzednik jej będzie sprawdzonym, co właśnie wyrażają pierwsze dwa wiersze dowodu; wobec tego, opierając się na nich i na przesłance 1., przy wspomnianem podstawieniu, możemy orzec prawdziwość jej następnika. Takie przejście od poprzednika zdania warunkowego do jego następnika nazywa się modus ponens. Mamy więc:

$$(1)\,.\,(2)\,.\,1\,[x, y \mid a, b] \rightarrow (a+b)\,\varepsilon\,q \tag{3}$$

Tak wygląda pierwsze ogniwo dowodu. Na lewo od zdania, które otrzymaliśmy, zapisaliśmy wiersze dowodu i przesłankę (wraz z odnośnem podstawieniem), na którą się powołujemy. Postępując dalej w sposób zupełnie podobny, t. j. stosując ciągle modus ponens, otrzymujemy następne wiersze dowodu:

$$(3)\,.\,(2)\,.\,3\,[x, y \mid (a+b), b] \mid \rightarrow \{(a+b)-b\}\,\varepsilon\,q \tag{4}$$

$$(3)\,.\,(2)\,.\,4\,[x, y \mid (a+b), b] \mid \rightarrow \{[(a+b)-b]+b\} = (a+b) \tag{5}$$

$$(4)\,.\,(1)\,.\,(2)\,.\,(5)\,.\,2\,[x, y, z \mid \{(a+b)-b\}, a, b] \mid \rightarrow \{(a+b)-b\} = a,$$

co było do okazania.

Ustanowiliśmy zatem związek logiczny pomiędzy pewnem twierdzeniem a przesłankami, które nam służyły do jego uzasadnienia. Aby sobie te rzeczy lepiej uprzytomnić, rozpatrzmy je nieco ogólniej. Zadajmy sobie mianowicie pytanie, czy w czasie dowodu korzystaliśmy ze znaczenia symboli, z którymi mieliśmy do czynienia? Dostrzegamy odrazu, iż w odniesieniu do symboli matematycznych, odpowiedź wypada przecząco: korzystaliśmy tylko, w sposób czysto formalny, z pewnych twierdzeń, które można o tych symbolach napisać; były to przesłanki naszego dowodu. Inaczej przedstawia się sprawa w odniesieniu do symbolu

$$\supset$$

(a także i do kropek); na jego znaczeniu oparliśmy cały sposób dowodzenia: Jest to symbol, którego treść zawsze musi pozostać stałą; jest to t. zw. stała logiczna.

Powracając jeszcze raz do symboli arytmetycznych, z którymi mieliśmy do czynienia, zauważmy, iż, skoro nie korzystaliśmy bezpośrednio z ich treści, możemy ją zmieniać, a więc rozmaicie te symbole interpretować. Zależnie od tego, czy przy danej interpretacji przesłanki dowodu pozostaną prawdziwemi lub nie, będziemy mieli pewność, że osiągnięty wynik jest prawdziwym, lub też tej pewności nie będziemy mieli. Oczywiście jednak nie jest rzeczą wykluczoną, by, mimo fałszywości przesłanek, twierdzenie samo było prawdziwem. We wszystkich wszakże przypadkach związek pomiędzy przesłankami a twierdzeniem pozostanie ważnym.

Dla wyjaśnienia powyższych rzeczy na przykładzie, zastąpmy niektóre z rozważanych symboli arytmetycznych przez inne symbole, do których nie będziemy przywiązywali określonego z góry znaczenia. Zastąpmy mianowicie znaki

$$+ \text{ i } -$$

przez dwa inne znaki działań

$$\sqcup \text{ i } \sqcap$$

i przepiszmy z taką zmianą przesłanki 1.—4. Otrzymamy wówczas przesłanki następujące:

1'. $x \varepsilon q \,.\, y \varepsilon q \,.\supset.\, (x \sqcup y)\ \varepsilon q$

2'. $x \varepsilon q \,.\, y \varepsilon q \,.\, z \varepsilon q \,.\ (x \sqcup z) = (y \sqcup z) \,.\supset.\, x = y$

3'. $x \varepsilon q \,.\, y \varepsilon q \,.\supset.\, (x \sqcap y)\ \varepsilon q$

4'. $x \varepsilon q \,.\, y \varepsilon q \,.\supset.\, \{(x \sqcap y) \sqcup y\} = x$

Twierdzenie zaś nasze przybiera postać:

$$x \varepsilon q . y \varepsilon q . \supset . \{(x \sqcup y) \sqcap y\} = x$$

Twierdzenie to wynika z powyższych przesłanek. Odnośnego dowodu nie potrzebujemy tutaj rozwijać, gdyż nie różniłby się on od poprzedniego dowodu niczem innem, jak tylko zmianą znaków działań. Wspomniany przez nas związek logiczny jest niezależnym od tego, czy przesłanki 1.—4'. są sprawdzone, czy nie. Cała różnica polega na tem, że w pierwszym wypadku możemy stąd wywnioskować o prawdziwości twierdzenia, w drugim zaś nic powiedzieć nie możemy, bo twierdzenie może być zarówno prawdziwe, jak fałszywe.

Interpretację symboli $\sqcup$ i $\sqcap$, przy której spełnione są wszystkie przesłanki, otrzymamy identyfikując znak

$$\sqcup$$

ze znakiem dodawania a znak

$$\sqcap$$

ze znakiem odejmowania; wówczas prawdziwem jest i twierdzenie. Właśnie dla tego przypadku przeprowadziliśmy przedtem jego dowód.

Ciekawszy przypadek będziemy mieli, jeśli zidentyfikujemy pierwszy znak ze znakiem mnożenia a drugi — ze znakiem dzielenia. Wówczas przesłanka 2'. fałszywą dla jest

$$z = o,$$

zaś przesłanka 4'. jest nieprawdziwą, względnie traci sens, przy

$$y = o.$$

Pomimo to, dowody oparte na tych przesłankach mogą być poprawne, tylko to, co udowodnimy, może się okazać fałszem. W danym przypadku twierdzenie nasze byłoby fałszywem dla

$$y = o,$$

gdyż następnik jego przybrałby postać

$$o : o = a,$$

co jest fałszem, ponieważ symbol

$$o : o$$

oznacza każdą liczbę.

Jeżeli przyjmiemy, że symbole

$$\sqcup \text{ i } \sqcap$$

oznaczają odpowiednio potęgowanie i pierwiastkowanie, t. j.

$$x \sqcup y = x^y . x \sqcap y = \sqrt[y]{x},$$

to przesłanki nie będą wszystkie prawdziwemi, a i twierdzenie będzie fałszywem, bo n. p. nie jest prawdą, że

$$\sqrt{(2^2)} = 2,$$

albowiem symbol

$$\sqrt{(2^2)}$$

oznacza zarówno

$$+2 \text{ jak } -2.$$

Podkreślamy jednak, że z tego, iż przesłanki nie są sprawdzone, nie można wnioskować o fałszywości twierdzenia: Możnaby łatwo znaleźć interpretację, przy której przesłanki byłyby fałszywe — a twierdzenie prawdziwem.

Odkładamy na później głębsze wniknięcie w istotę dowodu; to, co o nim wyżej powiedzieliśmy, wystarcza w każdym razie, aby to nie było puste słowo. Tymczasem pragniemy jeszcze na chwilę powrócić do ogólnego obrazu nauki dedukcyjnej i uzupełnić go paroma rysami. Widzieliśmy więc, że w nauce mamy dwie kategorje zdań przyjętych bez dowodu: postulaty i definicje. Okazuje się wszakże, (mogliśmy się o tem przekonać na ostatnim przykładzie), iż w dowodach posługujemy się formalnie definicjami zupełnie taksamo, jak postulatami lub jakiemikolwiek innemi twierdzeniami. Pochodzi to stąd, że skoro termin wprowadzony przez definicję jest przyjęty, odnośna definicja staje się takiem samem twierdzeniem, jak każde inne, t. j. twierdzeniem o przedmiotach nam znanych. Jest jednak pewna cecha, która odróżnia definicję od postulatu: Mianowicie, każdej definicji można uniknąć. Tak n. p. możemy unikać terminu „kwadrat“, mówiąc stale zamiast tego „prostokąt równoboczny“. Możemy więc sobie wyobrazić, że z nauki wyrugowaliśmy wszystkie definicje. Taka struktura nauki byłaby teoretycznie znacznie prostsza, w praktyce jednak niewykonalna. Gdybyśmy bowiem każdy definjowany termin zastąpili przez kombinację, zapomocą której go określiliśmy, wszystkie wypowiedzi stałyby się tak długie, że najprostsze rozumowanie byłoby nie do przebycia. Znaczenie definicji jest więc praktyczne. Wprowadza ona skrót, zastępujący

zawilsze wyrażenie. Poza tem znaczenie jej polega na wyborze tej kombinacji terminów uprzednio wprowadzonych, którą, przy pomocy jej, wprowadza się do badania. Sama definicja służy tylko do umożliwienia orzeczeń, dotyczących tej kombinacji, istotną zaś ważność posiada właściwie sama kombinacja.

Widzieliśmy, jak przez wyrugowanie definicji można uprościć obraz teoretyczny nauki. Ale można w tym kierunku pójść jeszcze dalej: Możemy w dowodach twierdzeń nie powoływać się na poprzednio udowodnione twierdzenia, wcielając natomiast tam, gdzie trzeba, ich dowody do dowodu danego twierdzenia. Na początku nauki będziemy mieli wówczas pewne postulaty, następnie zaś twierdzenia udowodnione wprost na podstawie tych postulatów; zarówno te twierdzenia, jak i postulaty, wyrażone będą zapomocą pojęć prymitywnych. Definicyj nie będzie. a porządek twierdzeń będzie obojętny. Ze względów, o których już wspominaliśmy, taki obraz nauki nie nadaje się wcale do urzeczywistnienia, natomiast, jako obraz teoretyczny, jest zupełnie możliwym i niejednokrotnie pożytecznym.

Wszystko zatem opiera się, w istocie rzeczy, na postulatach i pojęciach prymitywnych. Skoro jednak terminy prymitywne przyjmujemy bez definicji, powstaje pytanie: co te terminy mają oznaczać? Czyż byłyby to symbole zamiast których wolno nam podstawiać, co chcemy? Tak bynajmniej nie jest, a to dlatego, że te terminy związane są postulatami. Postulaty wprawdzie mogą w praktyce zawierać także terminy definjowane, ale mówiliśmy już wyżej o możliwości usunięcia tych ostatnich. Układ więc postulatów przypomina układ równań, w których niewiadomym odpowiadają terminy prymitywne. Dowolność zatem znaczeń terminów prymitywnych ograniczona jest tem. że mają one spełniać postulaty. Ale te znaczenia mogą być przez to niezupełnie określone. Inaczej mówiąc, układ terminów prymitywnych może dopuszczać rozmaite interpretacje, wskutek czego i treść całej nauki ulega rozmaitym interpretacjom.

Nie będziemy się już więcej zastanawiali nad stosunkiem postulatów do pojęć prymitywnych. Przytoczymy tylko pogląd włoskiego matematyka, Giov. Vailati'ego, który sądzi, iż postulaty, które przyjmujemy intuicyjnie, nie są niczem innem, jak ukrytemi definicjami lub ich częściami. Terminom bowiem, które w nich występują, nadajemy takie właśnie znaczenie, aby te postulaty były

sprawdzone. Gdyby się nam udało wszystkie postulaty zamienić na definicje, te terminy, któreby pozostały prymitywnemi, dopuszczałyby zupełnie dowolną interpretację. Nauki istniejące nie są jednak tego typu.

Kant. jak wiadomo, oparł swą filozofję na podziale zdań na analityczne i syntetyczne. Co przez to rozumieć należy, trudno dociec. Różni uczeni różnie o tem myślą. Kant sam prawdopodobnie tych pojęć dokładnie nie znał. Sądzimy, że to, co on intuicyjnie w podziale swoim uchwycił, jest właściwie rozróżnieniem definicyj i postulatów. Postulaty są właśnie zdaniami syntetycznemi. W tem znaczeniu można zgodnie z Kantem powiedzieć, że matematyka opiera się na zdaniach syntetycznych. Postulaty bowiem pozwalają oczywiście odbudować całą naukę.

Podaliśmy wyżej główne rysy gotowej nauki dedukcyjnej. To jest właśnie zagadnienie logiki, t. j. tej logiki, której niniejsza książka jest poświęconą i która jest jedyną prawdziwą logiką — logiki dedukcyjnej. Ale nauka się rozwija. Ona się tworzy, powstaje. Obraz zaś nauki powstającej jest całkiem inny, niż nauki gotowej. Tworzenie bowiem nowych rzeczy nie odbywa się podług żadnych z góry określonych reguł i prawideł. Ars inventiva, t. j. umiejętność tworzenia, jako nauka wcale nie istnieje. Tworzy się więc przypadkowo i dorywczo, głównie za sprawą intuicji i fantazji. Główną metodą badania jest tutaj indukcja, mianowicie nie indukcja matematyczna, ale zwyczajna przyrodnicza indukcja zwana także indukcją niezupełną. Chcąc badać jakieś związki, matematyk zwraca się najpierw do najprostszych przypadków i posuwa się stopniowo dalej, usiłując pochwycić wspólne ich cechy. Mamy tu do czynienia z dwojaką syntezą: syntezą pojęć i syntezą sądów. Za punkt wyjścia służą zwykle rzeczy zawiłe i złożone, przytem ujęte intuicyjnie, bo tutaj nie chodzi o związek logiczny, tylko o prawdę, t. j. czy coś jest tak, jak my o tem myślimy, czy też nie jest tak? Związek logiczny odgrywa tu rolę podrzędną, środka przekonywania się o prawdzie. Nauka z tego punktu widzenia jest zbiorem prawd, faktów. Przedstawia się ona w ten sposób dlatego, że symbole, któremi w niej się posługujemy (terminy naukowe) mają określone znaczenie: one odpowiadają naszym pojęciom intuicyjnym. Więc i twierdzenia nasze podpadają pod kontrolę intuicji i muszą być z nią zgodne. Z tego punktu widzenia jest rzeczą obojętną, na jakich twierdzeniach oprzemy dowód nowego twierdzenia, byle owe twier-

dzenia były prawdziwe i dowód był poprawny. Zupełnie co innego mamy w nauce gotowej. Tam niema nowych twierdzeń. Chodzi o to, aby całą naukę sprowadzić do najmniejszej możliwie ilości twierdzeń, które stają się postulatami. Istnieje przeciwieństwo pomiędzy nauką gotową a nauką in statu nascendi. W tej ostatniej wszystko jest okryte gęstą mgłą niejasności. Definicje są nieporządnie wydzielone a dowody — niezupełne. Często mylimy się w naszych uogólnieniach. Dopiero, prostując wiele błędów, dochodzimy do ostatecznych wyników. To, co do nas przychodzi jako nieokreślony pomysł, rozważamy, roztrząsamy i staramy się jakoś rozplątać. Bo, doprawdy, praca naukowa, zwłaszcza w dziedzinie matematyki, ma charakter rozplątywania jakichś tajemniczych węzłów! Stąd to pochodzi, iż tytuły tylu starych ksiąg matematycznych zaczynają się od łacińskiego wyrazu: Enodatio.

ROZDZIAŁ II.

# Zarys historyczny: powstanie logiki w świecie starożytnym.

Kolebką nauki jest Grecja. Zapożyczając u narodów dawniejszych tylko praktyczne początki nauk (u Egipcjan — geometrji, u Babilończyków — astronomji, u Fenicjan — arytmetyki), utworzyli Grecy z tych wiadomości początkowych odpowiednie nauki, podczas. gdy u tamtych narodów początki owe wcale się nie rozwinęły. Taką była potęga greckiego ducha! On to zatem stworzył podstawę tej kultury, z której teraz korzystamy. Jak błędnym więc jest ten argument, tak często używany przez przeciwników wykształcenia klasycznego, iż, jeżeli uznajemy potrzebę nauczania języków greckiego i łacińskiego, to musimy też uznać potrzebę nauczania wszystkich innych języków starożytnych!

Możnaby pomyśleć, że dla poznania twórczości greckiej mogą wystarczyć przekłady. Dosyć jednak zajrzeć do dokładniejszego słownika, aby zobaczyć, jaka masa wyrazów jednego języka odpowiada prawie każdemu wyrazowi drugiego. Naturalnie, w rzeczach prostych i jasnych łatwo zrobić wybór. Ale takie rzeczy, jak pisma Arystotelesa, pełne subtelnych odcieni i niejasności, nie mogą być poznawane z przekładów, bo przekład zaciera wszystkie ślady, podług których myśl autora może być odgadniętą.

Aby dać pojęcie o świetności greckiej nauki, przytoczymy tylko jeden, ale chyba dosyć wymowny, przykład:

Nie wiemy nic pewnego o stanie geometrji greckiej przed Pitagorasem; jednakże kompetentni badacze, a między nimi i Paul Tannery, przypuszczają, iż wówczas wyobrażano sobie wszelki odcinek jako złożony ze skończonej ilości punktów. Wynikało stąd, iż można stosunek dwóch jakichkolwiek odcinków przedstawić jako liczbę, liczbę, oczywiście, wymierną, gdyż, jak wiadomo, Grecy

znali jedynie liczby całkowite i ułamkowe. Geometrja miała. dzięki temu. postać zgrubsza podobną do dzisiejszej. Wywrócił jednakże to wszystko Pitagoras przez odkrycie odcinków niewspółmiernych; wykazał on bowiem. że stosunek przekątni kwadratu do jego boku nie da się wyrazić żadną liczbą całkowitą ani ułamkową. Geometrja w ten sposób utraciła swą podstawę. Odkrycie to było tak katastrofalnem dla nauki. iż. jak głosi podanie. Pitagorejczycy mieli przez dłuższy czas utrzymywać je w tajemnicy.

Nową podstawę dał geometrji dopiero Eudoksos, sławny lekarz, matematyk i astronom z wyspy Knidos, żyjący w IV wieku przed Chrystusem, przez stworzenie teorji proporcji, czyli stosunków odcinków. odpowiadającej w zupełności i w owych czasach zastępującej to. co dzisiaj nazywamy teorją liczb niewymiernych. Teorja ta jest wyłożoną w V. księdze Elementów Euklidesa. Wartość naukowa tej teorji jest tak wielką. iż dotychczas może ona służyć za wzór konstrukcyj ściśle naukowych. W czasach nowożytnych zarzucono tego rodzaju rozważania i zastąpiono proporcje przez liczby niewymierne, jakkolwiek nie posiadano początkowo naukowej ich teorji. Tę ostatnią stworzyli w drugiej połowie ubiegłego stulecia dwaj uczeni niemieccy, Weierstrass i Dedekind; dopiero wówczas powrócono do wyżyn ścisłości i doskonałości nauki greckiej!

Z innemi naukami powstała w Grecji i logika. Zaczątki każdej nauki trudne są do zbadania. U Arystotelesa. jednego z największych filozofów wszystkich czasów, znajdujemy tę naukę w postaci bardzo już dojrzałej, która aż do czasów najnowszych zachowała się prawie niezmienioną. Arystoteles słusznie jest poczytywany za twórcę tej nauki. On sam jednak mówi o tem. co zawdzięcza swoim poprzednikom: Otóż najwięcej zawdzięcza on swemu nauczycielowi, Platonowi. Ten zaś idee główne zawdzięcza z kolei swojemu mistrzowi, którym był Sokrates. Z tą właśnie trjadą związane jest powstanie logiki jako nauki. Schemat następujący pozwala nam widzieć jasno stosunki chronologiczne tej najświetniejszej epoki filozofji greckiej:

|—— Platon ——|
469 — 427 — 399 — 384 — 347 — 322
|__ Sokrates __|  |__ Arystoteles __|

Te pamiętne lata oznaczają. że Sokrates żył od r. 469 do 399 przed Chrystusem. a więc lat 70. Platon od 427 do 347, a więc

lat 80, Arystoteles od 384 do 322. a więc lat 62. Arystoteles urodził się więc w 15 lat po śmierci Sokratesa, z którym go pośrednio łączy Platon, jako uczeń Sokratesa a nauczyciel Arystotelesa.

Logika przedstawia się nam w dziełach Arystotelesa w formie tak zakończonej, że wielki filozof nowożytny. Kant. był zdania, iż dalszy rozwój tej nauki nie jest wcale możliwym. Kant jednak, jak się okazało, był w błędzie, bo nauka ta wcale nie przestaje się rozwijać i zwłaszcza w czasach najnowszych rozwój jej stał się dość bystrym. Nie przeczy to bynajmniej temu, iż już Arystoteles podał ją w formie znacznie rozwiniętej. Nie będzie to wcale zdanie paradoksalne, jeżeli powiemy z L. Couturat'em, iż właściwie doskonałość dzieł Arystotelesa i niezmierna powaga, jaką wskutek tego cieszył się przez długie wieki, przeszkadzały dalszemu rozwojowi logiki. Jak był krępującym wpływ tej powagi, można widzieć z zaciętości, z jaką w epoce Odrodzenia uczeni, którzy rozpoczęli walkę z jej wpływem, przeciwko Arystotelesowi występowali. Taki prawdziwy uczony, jakim był Petrus Ramus (Pierre de la Ramée), w roku 1536 bronił tezy, iż wszystko, cokolwiek powiedział Arystoteles, jest nieprawdą!

Historycy logiki upatrują jej początki już w wieku VI przed Chrystusem. T. zw. prawa myślenia znajdują się u filozofa Parmenidesa, który powiada: „Trzeba mówić i myśleć, że to, co jest, jest“. Zasada ta, jest znaną pod nazwą prawa tożsamości. Daleko donioślejszem jest jednak to, że właśnie w tej szkole Eleatów, do której należał Parmenides, powstały pierwsze znane nam dowody przy pomocy rozumowania. Parmenides nauczał, że świat, który znamy, jest złudzeniem zmysłów, że w rzeczywistości ani mnogość oddzielnych rzeczy, ani ruch i w ogólności zmiana, wcale nie istnieją; iż poza tem złudzeniem kryje się jakiś jedyny, niezmienny byt.

W przeciwieństwie do tego uczył Heraklit, że wszystko się zmienia („wszystko płynie“), a stałość, którą obserwujemy, jest właśnie złudzeniem zmysłów, pochodzącem stąd, że zmysły nasze są niedość ostre, by dostrzec ciągłe, drobne zmiany, jakie zachodzą w tem, co się wydaje niezmiennem. Przyznać trzeba, że jego pogląd zgadzał się z poglądem, opartym na nowoczesnej fizyce, według którego n. p. arkusz papieru, na którym piszemy, nie jest czemś niezmiennem, ale jakby chmurą, złożoną z atomów w ciągłym ruchu, przyczem jedne do niej wpadają a inne wypadają.

Pogląd Heraklita jest dość jasny. Przeciwnie, to, co twierdzi

Parmenides, bynajmniej jasnem nie jest. Nie można sprawdzić tego zapomocą zmysłów, gdyż Parmenides nie ufa ich świadectwu. Nic więc dziwnego, iż Zenon, uczeń Parmenidesa, wpadł na pomysł użycia rozumowania dla uzasadnienia nauk, jakie głosiła szkoła, do której należał. Ułożył on osiem t. zw. argumentów, z których cztery miały dowodzić niemożliwości ruchu, a cztery — niemożliwości mnogości. Te słynne argumenty otrzymały niesłusznie nazwę sofizmatów t. j. rozumowań świadomie fałszywych. Arystoteles nazywa je zresztą paralogizmami, t. j. rozumowaniami nieświadomie fałszywemi. Można powiedzieć, że niema prawie autora w dziedzinie filozofji, któryby się w ten lub ów sposób nie znęcał nad tymi argumentami, a każdy prawie usiłuje na swój sposób okazać, że to są jawne błędy, ale jakoś to się im nigdy nie udaje. Do wyjątków należą tacy wybitni uczeni, jak filozof Hamilton, a w naszych czasach B. Russell, którzy rozumieją głębokość tych argumentów. Wielka to strata, iż dzieło Zenona do nas nie doszło. Mamy tylko innych pisarzy wyciągi, niewiadomo, o ile poprawne.

Przytoczymy tylko pierwsze dwa argumenty przeciwko ruchowi, jako najbardziej, naszem zdaniem, zasługujące na uwagę. Weźmiemy je w formie, w jakiej je podaje Arystoteles, najwiarygodniejszy świadek starożytności greckiej. Pierwszy z tych argumentów jest następujący:

> „Ruch jest niemożliwy, bo to, co się porusza, zanim dosięgnie końca drogi, musi dosięgnąć jej środka".

Jest to forma niezupełna, którą można rozmaicie rozumieć; prawdopodobnie chodziło o to, że zanim to, co się porusza, dojdzie do końca drogi, musi dojść do jej połowy, więc przedtem musi dojść do jednej czwartej, jeszcze przedtem do jednej ósmej i t. d. Ale ten ciąg ułamków nie ma początku, t. j. niema w nim najmniejszej liczby, zero bowiem doń nie należy. Ruch więc nie może wogóle się zacząć.

Drugi argument podają zwykle w tej postaci, że Achilles nie może dogonić żółwia. Arystoteles podaje go w formie następującej:

> „Poruszający się prędzej, nie dogoni poruszającego się powolniej, bo przedtem, t. j. nim to nastąpi, ścigający musi się znaleźć w miejscu, skąd wyruszył już uciekający. Więc uciekający będzie zawsze na przedzie".

Tu więc niema końca drogi!

Argumenty Zenona, wbrew mniemaniu wielu uczonych, nie

są bynajmniej błędnemi rozumowaniami, i jakkolwiek nie mogą nas przekonać, że ruch nie istnieje, to jednak przekonywują nas, że go pojąć nie możemy, czyli, że nie da się pomyśleć jako powstający. Istotnie, każdy z nas wyobraża sobie, iż poruszający się punkt musi przejść przez każdy punkt swojej drogi, ale nie może pojąć, w jaki sposób to zachodzi, skoro nie istnieje punkt najbliższy punktu danego. Zupełnie tak samo nie możemy sobie wyobrazić żadnej przemiany, bo nie istnieje chwila najbliższa do danej. Możemy widzieć, że się coś zmieniło, t. j. stwierdzić, że coś było przedtem i coś innego jest potem; ale jak się to stało — tego pojąć nie jesteśmy w stanie. To, co mówią nam argumenty Zenona, można, jak nam się zdaje, wyrazić tak: Myślenie składa się z aktów, które zajmują określone odstępy czasu. Odstępy te nie mogą być mniejsze od pewnej wielkości, więc ilość ich jest skończona. Nie możemy więc objąć nieskończoności świadomością. Tymczasem ilość punktów odcinka lub chwil w odstępie czasu jest nieskończoną.

Materję, której dotyczą argumenty Zenona, stanowią pojęcia, wykryte dopiero w XIX wieku przez matematykę i leżące u podstaw analizy. Jest to to, co pierwszy dostrzegł Bolzano, iż ciąg nieskończony wielkości może nie posiadać wielkości największej albo najmniejszej.

Historyczna doniosłość argumentów Zenona jest ogromna. Można powiedzieć, że to one nadały charakter matematyce starożytnej. Wykrywając trudności, jakie tkwią w pojęciu nieskończoności, Zenon odstraszył matematyków greckich od tego pojęcia tak skutecznie, że w dziełach ich nigdzie się z niem jawnie nie spotykamy. Tam, gdzie go nie można ominąć, jak w metodzie granic, matematycy greccy ukrywali je w formie dowodów przez reductio ad absurdum. Swoją nadzwyczajną ścisłość zawdzięcza matematyka grecka w znacznej mierze argumentom Zenona.

Chcemy podać prosty przykład, w jaki sposób Grecy ukrywali pojęcie nieskończoności: Wiadomo, jak obliczamy dzisiaj powierzchnię koła. Archimedes zaś, który pierwszy wzór na nią podał, formułuje to jak następuje: Pole koła równa się polu trójkąta, zbudowanego na jego promieniu, a mającego drugi bok prostopadły, długości równej obwodowi koła. Dowód zaś, przy pomocy wpisanych i opisanych wielokątów, polegał na wykazaniu. że pole koła nie może być ani mniejszem ani większem od wspomnianego trójkąta.

I późniejsi matematycy używali podobnych rozważań, unikając starannie pojęcia nieskończoności. Kepler pierwszy miał odwagę wprowadzić je do matematyki w swojej przeróbce dzieł Archimedesa. Jego rozumowanie dla uzasadnienia wzoru na powierzchnię koła jest następujące: Okręg koła składa się z nieskończenie wielu punktów, które są podstawami trójkątów o wspólnym wierzchołku w środku koła. Ponieważ podstawy są nieskończenie małe, zatem wysokość równa się promieniowi koła. A że dla pola trójkąta miarodajną jest jego podstawa i wysokość, możemy te trójkąty tak ułożyć, aby ich podstawy leżały na stycznej do koła a wierzchołki zlewały się ze środkiem jego. Ale suma pól tych trójkątów będzie właśnie równą polu wyżej wspomnianego trójkąta. — Rozumowanie to jest niezmiernie wadliwe i nieścisłe, ale z niego powstało rozumowanie współczesne przy pomocy pojęcia granicy. — W końcu ubiegłego stulecia odkryto nieznaną przedtem pracę Archimedesa: I okazało się, iż on także posługiwał się tego rodzaju rozumowaniami. Ale powiada on wyraźnie, iż metoda taka pożyteczną być może do wykrycia jakiegoś związku, a nawet do znalezienia dowodu jego; nigdy jednak nie może być zastosowaną do samego dowodu.

Takiem było znaczenie argumentów Zenona dla matematyki. Niemniejszem było ich znaczenie dla logiki. Są to bowiem pierwsze dowody logiczne. Stanowią one zatem pierwsze kroki na drodze rozwoju tej nauki. Dalsze kroki uczynili sofiści.

W czasie najwyższego rozkwitu życia politycznego Grecji (po wojnach perskich) rozwiązanie najważniejszych zagadnień życia społecznego stało się zależnem od uchwał, które przyjmowano na licznych zgromadzeniach większością głosów. Stąd staje się jasnem, jak wielką potęgą mogła być umiejętność przekonywania ludzi. Sztuka dowodzenia była potężnem narzędziem w ręku mówców, którzy występowali na tych zebraniach. Potrzeba praktyczna powołała w ten sposób osobną klasę ludzi — sofistów, którzy wędrowali z miasta do miasta i uczyli mądrości w zamian za pewne wynagrodzenie. Mędrcy i przedtem uczyli rozumowania, ale nauka ta bywała udzielaną w osobnych szkołach a przytem bezpłatnie. Teraz mądrość okazała się potrzebną w życiu praktycznem i nie można się dziwić, że ludzie za nią chętnie płacili. Ale zapłata najczęściej wiąże ludzi i pozbawia ich wolności. Tak i mądrość sofistów przestała być mądrością swobodną badaczy. Stała się mądrością praktyczną człowieka, który się przystosowuje do potrzeb chwili.

Podczas, gdy mędrcy wolni uczyli poznawania rzeczy, sofiści musieli uczyć sztuki dowodzenia i przekonywania. Chodziło im przedewszystkiem o skuteczność ich nauki, t. j. o to, aby ich uczeń mógł udowodnić to, co chciał, bez względu na to, czy to była prawda, czy fałsz. Więc dowodzono nieraz rzeczy sobie przeciwnych a także rzeczy notorycznie fałszywych. Nie można się zatem dziwić, że z imieniem sofisty związane jest pewne odium. Stosunek pogardliwy do sofistów nie jest jednakże usprawiedliwiony. Najstarszym sofistom, zwłaszcza Protagorasowi i Gorgjaszowi, nauka niemało zawdzięcza. Protagoras uczył, że dla każdego prawdą jest to, co on sam uważa za prawdę. Subjektywizm krańcowy sofistów, połączony z krytyką dogmatyzmu, wytworzył w epoce późniejszej sceptycyzm starożytny, któremu nauka współczesna, i tak jeszcze chorująca na dogmatyzm, zawdzięcza swoje pierwiastki krytyczne, tak niezbędne dla jej rozwoju.

Sztuka przekonywania, której uczyli sofiści, posługiwała się wszelkimi środkami; najważniejszym z nich jednak było rozumowanie. Nic więc dziwnego, że sofiści zajmowali się logiką. Przechowało się jednak tylko niewiele z ich poważnych argumentacyj. Do takich należała argumentacja Gorgjasza, który dowodził, że:

1. Nic nie istnieje.
2. Gdyby zaś coś istniało, to nie dawałoby się poznać.
3. Gdybyśmy nawet mogli coś poznać, nie moglibyśmy naszej wiedzy innym udzielić.

Podmiotowość sofistów, negująca wszelką wiedzę przedmiotową, prowadziła naturalnie do zaprzeczenia całej nauki. Z tego ciężkiego przesilenia wywiódł naukę grecką jeden z największych mędrców świata — Sokrates.

Sokrates nie napisał nic oprócz krótkich wierszy, ułożonych przed śmiercią w więzieniu. To, co wiemy o jego nauce, zawdzięczamy wyłącznie jego uczniom, Platonowi i Ksenofontowi. W djalogach Platona występuje zawsze Sokrates w roli jednego z dysputujących, najczęściej osoby głównej, która prowadzi całą dysputę. Krytyka naukowa stwierdziła jednak, iż ten Sokrates wygłasza niekiedy nauki, których nie znał wcale Sokrates historyczny; są to teorje samego Platona. Z drugiej strony natomiast, badania krytyczne, przez porównanie Platona z Ksenofontem i uwzględnienie późniejszych pisarzy, pozwalają powziąć pewne wyobrażenie o Sokratesie.

Sokrates jest przedewszystkiem jednym z najgłębszych pedagogów wszystkich czasów. Dwie genialne myśli Sokratesa mają dla pedagogiki doniosłe znaczenie. Pierwszą rozwija Platon w dialogu „Tectet“, gdzie Sokrates, dla jasności, przyrównywa swoją działalność nauczycielską do zabiegów położniczych. Myśl, którą tu rozwija, jest następująca: nauczyciel nie powinien udzielać wiadomości uczniowi; powinien mu tylko dopomóc do wydobycia tych wiadomości z siebie samego. Sokrates przytem powiada, iż robią mu zarzut, że niczego nie uczy. Rzeczywiście, on nie może uczyć mądrości, bo jej nie posiada. On tylko może pomagać drugim w wydobywaniu wiedzy z samych siebie. Myśl ta jest podstawą całej pedagogiki. Do cudzego umysłu nie można włożyć wiedzy, jak książkę do szafy, można tylko obudzić i skierować czynność umysłu, aby badał rzeczy samodzielnie. Można i należy mu w tem dopomóc, pokazać, co w tej mierze zrobili inni, ale tylko w tym celu, by on sam to na swój sposób zrobił. Przytem jest rzeczą nadzwyczajnie ważną zachowanie pewnej miary, aby nie nadwyrężyć samodzielności ucznia, nie zatrzeć jego cech indywidualnych, gdyż właśnie indywidualność jest najcenniejszą rzeczą dla społeczeństwa.

Druga myśl podstawowa Sokratesa, także ogromnej wagi, rozwiniętą jest w dialogu „Menon“. Na przykładzie wykazuje on, że, aby się nauczyć czegokolwiek, trzeba z początku przyjść do przekonania, że się tego nie zna. Sokrates np. pyta się młodego chłopca, jak trzeba powiększyć bok kwadratu, aby jego pole podwoić. — Chłopak odpowiada, że trzeba oczywiście bok podwoić. Na to Sokrates, zamiast wprost mu zaprzeczyć, doprowadza go przez szereg umiejętnych pytań do poznania swego błędu. Dopiero wtedy chłopiec może się czegoś nauczyć! Ocenimy doniosłość tej myśli, jeżeli uwzględnimy, iż największą przeszkodą w nauce, a także najobfitszem źródłem pomyłek, jest właśnie uprzedzenie, mniemanie, że wiemy coś o rzeczy, o której w rzeczywistości nic nie wiemy. Te uprzedzenia bywają ukryte, t. j. na wpół świadome; tem trudniej przeto usunąć ich wpływ, paraliżujący myślenie.

Osobliwym był więc sposób nauczania Sokratesa: on nigdy nic nie twierdził. Stawiał tylko pytania i badał odpowiedzi, wykazując ich niedokładność lub błędność. Zwykłe słowa, któremi rozpoczynał swoją naukę, gdy temat był już wiadomy, były: rozważmy, zbadajmy. Gdy odpowiedź była błędną, nigdy Sokrates jej nie odrzucał; przeciwnie, podnosił ją i rozwijał dalej, stając na stano-

wisku swego przeciwnika dopóty, dopóki nie doprowadził do sprzeczności. Jego słowa przytem były zwykle takie: A przedtem my przyszliśmy przecież do innego wniosku, więc widocznie jest nie tak, jak myśleliśmy. Musi to być jakoś inaczej!

Tę metodę Sokratesa, zwaną metodą heurystyczną, i teraz uważa się za najlepszą w nauczaniu. Posiada ona głęboką podstawę psychologiczną. Twierdzenia bowiem wypowiadane dogmatycznie wywołują u większości ludzi opór, często całkiem bezwiedny. Skoro zaś powstało uprzedzenie, żadna argumentacja nie trafi do przekonania.

Pytanie heurystyczne jest wielką sztuką, której dopiero trzeba się uczyć. Pytania muszą być głęboko obmyślane bo w przeciwnym razie mogą wywołać wielką stratę czasu; trzeba starannie unikać wszelkich pytań błahych albo samych przez się zrozumiałych. Niektórzy nauczyciele rozumieją też fałszywie całą metodę, bo wszystkiego heurystycznie zrobić nie można. Niektóre rzeczy w nauce wynikają z umowy, inne z doświadczeń, których w danych warunkach powtórzyć nie można: te rzeczy musi się podawać dogmatycznie, a na nich dopiero można budować heurystycznie.

Zatrzymaliśmy się dłużej na sposobach pedagogicznych Sokratesa, bo i dla nauki wogóle są to rzeczy bardzo ważne, nauka bowiem nie da się oddzielić od nauczania. Zwracamy się teraz do zasług Sokratesa w nauce wogóle i w logice w szczególności. Sokrates oparł całą naukę na pojęciach ogólnych. Zrozumiał, że nauka nie może mieć do czynienia z przedmiotami rzeczywistemi, które, jak uczył Heraklit, wciąż się zmieniają. O tych rzeczach nie da się nic powiedzieć. Nauka musi mieć do czynienia z rzeczami niezmiennemi: Są to pojęcia ogólne. Podmiotowości sofistyki przeciwstawił Sokrates przedmiotowość nauki. Wykazywał, wbrew twierdzeniom sofistów, iż istnieje wiedza ogólnie przyjęta i niezależna od osobistych poglądów ludzi. Tego celu dopinał on przez indukcyjne badanie pojęć, które przeprowadzał swoją metodą heurystyczną, wyjaśniając prawdziwe znaczenie takich słów, jak „dobro", „cnota", „wiedza" i t. d. Stawiając pytanie, co znaczy dane słowo, np. „cnota", i otrzymując w odpowiedzi wyliczenie rozmaitych cnót, Sokrates stwierdzał, że mu nie o to chodzi, że on chce wiedzieć, co jest wspólnego we wszystkich tych rzeczach, wskutek czego właśnie każda z nich nazywa się cnotą. W ten sposób Sokrates

wypracowywał w swojem nauczaniu ten dział logiki, który obecnie nazywa się nauką o definicji.

W przeciwieństwie do Sokratesa i Arystotelesa, ludzi trzeźwych i, w gruncie, materjalistów, był Platon marzycielem i idealistą. Wprawdzie metafizyka jego nie należy do zakresu naszych badań, ale posiada ona rysy tak ważne i tak bliskie matematykom, że niepodobna jej pominąć całkowitem milczeniem. O tem, że poglądy zbliżały go do matematyków, świadczy np. znany napis, umieszczony u wrót jego szkoły i broniący dostępu do niej tym wszystkim którym obcą była matematyka.

Widoczne są u niego wpływy Pitagorejczyków i wogóle Wschodu, jako dziedziny, z której przychodzą wszystkie religje a także mistycyzm i spirytualizm. Według Platona składa się człowiek z ciała śmiertelnego i z duszy nieśmiertelnej. Ciało jest dla duszy więzieniem, z którego ta usiłuje się wyzwolić. Tem wyzwoleniem będzie śmierć, po której dusza połączy się z Bogiem; to jest cel życia. Na świecie zaś jest cierpienie i walka z ciałem. Na tym ziemskim padole trzeba patrzeć wciąż do góry, dążyć do ideału, gardzić dobrem materjalnem. Powinniśmy zawsze zachowywać to stanowisko Platona, choćby upadła nauka o dwoistości ciała i duszy; bo nawet to ziemskie życie, brane z tego punktu widzenia, nam wystarcza!

Ten pogląd Platona bardzo jest bliskim matematykom. Matematycy także spoglądają na świat sub specie aeternitatis, bo cóż wspólnego z rzeczywistością ma matematyk? Świat pojęć matematycznych jest całkiem innym, odrębnym i wyższym światem!

Sokrates zajmował się tylko etyką, uważając inne rzeczy za zbyt trudne. Platon zaś był bardziej wszechstronny. Rozciągnął on metodę Sokratesa na cały obszar nauki. Nie wiadomo dokładnie, co on sam stworzył, a co jego uczniowie, ale jest to dla nas rzecz małej wagi. W każdym razie znajdujemy w jego djalogach m. i. zarys ogólnej metodologji i teorji nauki dedukcyjnej.

W szkole Platona powstała metoda badania naukowego, znana dzisiaj pod nazwą analizy starożytnych. Myśl polega na tem, że, dla badania jakiegoś przypuszczenia, możemy z niego wyciągać wnioski, nie wiedząc jeszcze, czy jest ono prawdziwem, czy fałszywem. Wydaje się nam ona oczywistą, ale ten, kto pierwszy na nią wpadł, powitać ją musiał jako najwyższe odkrycie. W rzeczy samej, jest to wielka metoda badania, a zastosowania jej są bardzo liczne.

W matematyce odgrywa ona ważną rolę. Od niej pochodzi nazwa analizy matematycznej.

Platon łączy niejako sprzeczne poglądy Parmenidesa i Heraklita w jedną całość. Twierdzi on, że świat, jaki dostrzegamy zapomocą naszych zmysłów, jest zmienny i właściwie jest tylko złudzeniem; prawdziwym światem jest świat idei, t. j. wzorów, podług których zrobione są rzeczy, które oglądamy. Trudno tę naukę zrozumieć Sam Platon prawdopodobnie nie wiedział co właściwie oznacza istnienie idei. Platon myślał, że tworzą one osobny świat. Ale miał pewne wątpliwości; nie wiedział n. p., jak się zdaje, czy rzeczy podłe, nędzne, mają też swoje idee.

Ideologja Platona uległa różnym transformacjom w ciągu wieków. U Arystotelesa pojawia się ona w znacznie trzeźwiejszej formie. Według niego idee są w samych rzeczach i nazywają się istotami rzeczy. Następnie w wiekach średnich, jako dalszy rozwój tego zagadnienia, powstał znakomity spór nominalistów z realistami. Jest to właściwie spór o znaczenie pojęć ogólnych. Nominaliści, negując osobne istnienie pojęć ogólnych, twierdzili, iż to, co my tak nazywamy, są to tylko terminy, nazwy, imiona (nomina) wspólne pewnej ilości osobnych rzeczy. Realiści, przeciwnie, uznawali rzeczywiste istnienie pojęć ogólnych. Później wytworzył się pogląd pośredni, t. zw. konceptualizm, uznawany dzisiaj przez większość uczonych, według którego pojęcia ogólne mają byt tylko w myśli naszej. Nie są to rzeczy tak dawne i przestarzałe. Przeciwnie, jeszcze dzisiaj nie są one zupełnie wyjaśnione. Łączy się z niemi pojęcie klasy, nad którem będziemy się jeszcze szczegółowo zastanawiali.

Zanim przejdziemy od Platona do Arystotelesa, musimy się zatrzymać tutaj na ogólnym charakterze tej epoki. Chcemy podkreślić, że wówczas u Greków skłonność do rozumowania abstrakcyjnego oraz zamiłowanie i zainteresowanie w tym kierunku było tak wielkie, jak poza tem w żadnej epoce u żadnego narodu. Jeżeli porównamy tę umysłowość z obecnie panującą w Europie, to odniesiemy bardzo dziwne wrażenie. Podczas gdy obecnie doniosłe znaczenie mają: obserwacja i eksperyment, uczeni zaś są zajęci w znacznej mierze sprawdzaniem faktów i większość ich z pewną nieufnością traktuje rozumowanie abstrakcyjne, zwłaszcza, jeżeli rezultaty jego nie dają się sprawdzić w drodze doświadczalnej, to w starożytności, wręcz przeciwnie, jakkolwiek uprawiano pewnego

rodzaju obserwacje i niekiedy (rzadko) eksperyment a także zbierano fakta, wszystko to jednak odgrywało rolę podrzędną Najważniejszem było rozumowanie. Śmiała myśl badaczy i filozofów nie znała granic i zapuszczała się tak głęboko w świat abstrakcji, jak się to potem nie zdarzało. Taki właśnie naród mógł wytworzyć logikę.

Bardzo charakterystyczne dla ówczesnego stanu myśli greckiej są trudności, t. zw. aporje, na które ona natrafiała i których przezwyciężyć nie mogła. Większość dzisiejszych uczonych odwraca się niemal z pogardą od nich, nazywając prowadzące do nich rozumowania sofizmatami. Ocena ta jest jednak niesłuszna. Z punktu widzenia logiki są to pytania, które muszą być badane z całą uwagą. Najlepszym dowodem jest fakt, że jedna z tych aporyj wypłynęła niespodziewanie na wierzch w matematyce, mianowicie w badaniach teorjomnogościowych. Jest to aporja, znana pod nazwą aporji kłamcy. Istnieje wiadomość, że filozof Chrysippos napisał o niej dzieło, składające się z sześciu ksiąg (rozdziałów). O drugim (Filetos z wyspy Kos) istnieje podanie, że zamęczył się na śmierć, rozmyślając o tej trudności. Kraj, który wydawał takich ludzi, mógł być istotnie kolebką nauki.

O tem, jak w dzisiejszych podręcznikach przekręca się i zniekształca myśl starożytnych Greków, świadczy sama postać, w jakiej się zwykle podaje wspomnianą aporję. Mówi się: „Kreteńczyk twierdzi, że wszyscy Kreteńczycy kłamią". Żadnej trudności tutaj nie widać. Arystoteles tak ją wyraża: Jeżeli ja mówię, że to, co twierdzę, jest kłamstwem, to niewiadomo, czy mówię prawdę czy fałsz. Znaczy to, że, jeśli ktoś powiada: „To, co ja mówię, jest kłamstwem", to nie można powiedzieć, ani że jest to orzeczenie prawdziwe, ani że jest fałszywe. Istotnie bowiem, jeśli przyjmiemy je za prawdę, to musimy przyjąć własną ocenę mówiącego, a więc uznać, że kłamie. W przeciwnym wypadku zmuszeni jesteśmy odrzucić jego ocenę, t. j. przyjąć, że mówi prawdę!

Rozważmy to bliżej: Niech $A$ będzie jakiemkolwiek zdaniem, $B$ zaś zdaniem, wyrażającem, iż $A$ jest fałszem. W takim razie, jeżeli jedno z tych zdań jest prawdziwem — drugie jest fałszem. Jeżeli zdanie $A$ zidentyfikujemy z $B$, to nie będzie ono mogło być ani prawdziwem, ani fałszywem. To jest właśnie nasza aporja. Powstaje ona dzięki temu, że nie można identyfikować zdania z jego oceną logiczną. Zdanie musi być najpierw wypowiedziane, a potem do-

piero można wyrażać jego ocenę. W przeciwnym wypadku otrzymujemy nie zdanie, a nonsens. Przekonaliśmy się wyżej, że jeśli zidentyfikujemy zdanie z jego ujemną oceną logiczną, to otrzymamy sprzeczność. Jeżeli natomiast zdanie zidentyfikujemy ze zdaniem wyrażającem, że ono jest prawdą. to sprzeczności nie otrzymamy, ale. powtarzamy, jest to równie niedopuszczalne, jak tamto. Formalnie niema bowiem żadnej różnicy pomiędzy temi dwoma wypadkami. Dlaczegóż więc w jednym z tych wypadków otrzymujemy sprzeczność? W tem tkwiła trudność, napotkana przez Greków.

Zatrzymamy się jeszcze na dwóch aporjach greckich. Pierwsza z nich nosi nazwę: „Protagoras i Euatlos". Oto, na czem ona polega: Euatlos uczył się u Protagorasa obrony spraw przed sądem. Protagoras był sofistą, pobierał więc zapłatę za naukę, której udzielał. Połowę umówionej sumy wpłacił Euatlos odrazu; drugą połowę miał zapłacić po wygraniu pierwszego procesu. Ale Euatlos nie prowadził procesów i drugiej raty nie zapłacił. Wtedy mądry Protagoras zażądał od niego tych pieniędzy, grożąc, że mu wytoczy sprawę w sądzie. Jeśli tedy Euatlos przegra, to zapłaci na mocy wyroku; jeśli zaś wygra, to na mocy umowy; w każdym więc razie będzie musiał zapłacić. Ale Euatlos, który już poduczył się sztuki rozumowania, odpowiada mu: „Jeżeli wygrasz proces, to nie zapłacę na mocy umowy. jeśli zaś przegrasz, to nie zapłacę na mocy wyroku; w żadnym więc razie nie zapłacę!"

Podczas gdy w aporji „Kłamca" zdanie było nieokreślonem, tu postępowanie jest nieokreślone. Gdyby sprawa sądowa dotyczyła czego innego, a nie treści umowy, to postępowanie byłoby zupełnie określonem. Ale gdy wyrok sądu ma właśnie w tej sprawie orzekać. wówczas postępowanie staje się nieokreślonem, bo na podstawie umowy ono musi być jednem, a na podstawie wyroku — drugiem. wręcz przeciwnem.

W aporji „Krokodyl" mamy to samo w innej cokolwiek postaci. Krokodyl porwał dziecko i mówi do ojca: „Oddam ci dziecko, jeśli odgadniesz, co postanowiłem z niem uczynić: oddać czy nie oddać; nie oddam natomiast jeżeli nie odgadniesz". Ojciec mówi: „Postanowiłeś mi dziecka nie oddać, ale musisz je oddać; jeślim dobrze zgadł — to na podstawie umowy, a jeślim źle zgadł — to na podstawie twego własnego postanowienia". Na to krokodyl: „W żadnym razie dziecka nie oddam; jeślim go postanowił nie

zwracać — to na podstawie mego postanowienia, a jeślim chciał je oddać — nie uczynię tego. ponieważ źle odgadłeś!"

Wobec takiego rozwoju rozumowania i trudności, na które ono natrafiało, wobec walki z sofistami, rozpoczętej przez Sokratesa i Platona, walki. w której chodziło o wykrycie sprzeczności i obalenie dowodów, któremi się posługiwali, trzeba było poddać myśl ludzką analizie wszechstronnej i stworzyć metodę sprawdzania dowodów. Tego podjął się właśnie Arystoteles. Zaznaczyć należy, iż, podczas gdy dzieła Platona, posiadającego zresztą dar twórczości poetyckiej, posiadają wielkie zalety literackie, dzieła Arystotelesa odznaczają się bezbarwnością i suchością wykładu. Są to prawdopodobnie jego wykłady opracowane przez uczniów. Dzieła te składają się z kilku części. Żadne z dzieł Arystotelesa nie nosi tytułu „Logika". Tego terminu, wprowadzonego dopiero później przez stoików, Arystoteles wcale nie znał. Ale kilka traktatów jego, objętych ogólną nazwą „Organon", stanowi zupełny kurs logiki o bardzo bogatej i głębokiej treści. Tu wchodzą następujące dzieła:

1. O kategorjach.
2. O interpretacji.
3. i 4. Pierwsza i druga analityka.
5. Topika.
6. O dowodach sofistycznych.

Z nich najważniejsze są obie analityki Pierwsza, co do swej treści odpowiada współczesnym podręcznikom logiki tradycyjnej, druga rozwija podstawy ogólnej metodologji. Omawiając w krótkości logikę Arystotelesa, będziemy narazie pobieżnie tylko dotykali jej treści, gdyż będzie ona w znacznej mierze przedmiotem naszych dalszych studjów. Logika Arystotelesa jest logiką w osnowie swej metafizyczną. Dlatego też i poza Organonem, mianowicie w jego metafizyce, natrafiamy na ustępy, dotyczące logiki. Dla nas jednak ważną jest tylko strona formalna logiki Arystotelesa która, wbrew dość rozpowszechnionemu mniemaniu filozofów, da się bez uszczerbku oddzielić od jej podkładu metafizycznego.

Analizując myśl ludzką, rozkłada ją Arystoteles na elementy, które dotychczas przechowały się w logice w postaci czterech zdań podstawowych:

Każde S jest P
Żadne S nie jest P.
Niektóre S są P.

Niektóre S nie są P.

Chodziło o metodę dowodzenia zdań, mających taką postać. U Arystotelesa odbywa się to przez wsunięcie pomiędzy terminy S i P, trzeciego terminu, zwanego terminem średnim. Jeżeli n. p. mamy przesłanki:

Każde S jest M,
Każde M jest P,

to możemy stąd wywnioskować:

Każde S jest P.

Tak więc z tego, że każdy wróbel jest ptakiem a każdy ptak jest zwierzęciem, wyciągamy wniosek, że każdy wróbel jest zwierzęciem. W ten sposób z dwóch przesłanek, zawierających wspólny termin, przez wyrugowanie tego terminu dostajemy wniosek, dotyczący pozostałych dwóch terminów. To jest syllogizm. Ale nie każde dwa zdania zawierające wspólny termin, dają możność wyciągnięcia takiego wniosku. N. p. z tego, że każdy wróbel jest zwierzęciem i każdy ptak jest zwierzęciem, nie wynika nic o wzajemnym stosunku terminów: wróbel i ptak. Wystarczy, aby się o tem przekonać, zamiast terminu „ptak" podstawić termin „płaz". — Powstaje przeto zagadnienie następujące: Jeżeli dwa zdania (zdania, oczywiście, postaci, rozważanej przez Arystotelesa) mają wspólny termin, kiedy i w jakim duchu można z nich wyciągnąć wniosek, dotyczący pozostałych dwóch terminów? — To jest właśnie zagadnienie, które rozwiązuje Arystoteles w swej syllogistyce, która, jak sam to zaznacza, została po raz pierwszy przez niego wyłożona, podczas gdy inne części logiki zawdzięcza on swoim poprzednikom.

W wielu traktatach logiki, zwłaszcza niemieckich, spotykamy się z ostrą krytyką Arystotelesa; tak samo twierdzi większość logistyków, iż logika Arystotelesa jest niezupełna i błędna. Wszystkie te zarzuty wywołane są przeważnie bardzo prostem nieporozumieniem. Mianowicie, starożytni Grecy mówili o klasach, ale mieli zawsze na myśli klasy niepuste. Istotnie, jeżeli wprowadzimy klasy puste, teorja Arystotelesa okaże się błędną; ale ta teorja ich nie obejmuje i odnosi się jedynie do klas niepustych, dla których postawione zagadnienie rozwiązuje zupełnie poprawnie. Inną jest rzeczą jej znaczenie praktyczne. Trzeba przyznać, że teorja, którą stworzył Arystoteles, nie znajduje zastosowania praktycznego, gdyż nasze myślenie nie może być sprowadzonem do tych elementów, które on rozważa; ale sama w sobie jest ta teorja bez zarzutu.

Syllogistyka Arystotelesa była teorją klas a uwzględniała jedynie zdania kategoryczne. Tymczasem do zastosowań, zwłaszcza w matematyce, przydatną jest przedewszystkiem logika zdań, t. j. teorja zdań warunkowych. Tą ostatnią, wraz z teorją zdań rozjemczych, zaczęli się zajmować: Teofrastos i Eudunus, rozszerzając w tym kierunku badania Arystotelesa. Badania te rozwijali dalej stoicy a następnie scholastycy średniowieczni.

ROZDZIAŁ III.

## Zarys historyczny: Rozwój logiki w średniowieczu i czasach nowożytnych.

Następną epoką rozwoju logiki jest średniowiecze. Epoka to nadzwyczaj zajmująca, jakkolwiek mało znana i, naogół, niesprawiedliwie osądzana. Zarzuca się jej bezpłodność scholastyczną. Prawdą jest, że ta epoka niewiele przyniosła nowego w zakresie nauk przyrodniczych; ale też zajmowano się wówczas głównie czem innem, mianowicie metafizyką, a przedewszystkiem — teologją. Syllogistykę Arystotelesa doprowadzono przytem do najwyższego stopnia doskonałości.

Kant nazywa syllogistykę średniowieczną: „feine Spitzfindigkeit". Widać stąd odrazu, iż matematykiem nie był, bo matematykowi syllogistyka, jako doskonałe rozwiązanie postawionego zagadnienia, podobać się musi. Istotnie, tacy wielcy uczeni, jak Kartezjusz, Leibniz i Newton, odnosili się do niej z prawdziwą czcią, jako do idealnie precyzyjnego sposobu rozumowania.

Zasługa scholastyków polega na tem, że nadali syllogistyce postać prostą, jasną i łatwą do stosowania. My właśnie poznamy syllogistykę w tej postaci. Syllogistyka osiągnęła tę postać dosyć wcześnie, bo już w XIII wieku; znajdujemy ją po raz pierwszy w dziele niejakiego Piotra Hiszpana, które właśnie z tego czasu pochodzi

Było w średniowieczu wiele wybitnych i zajmujących postaci, jak np. św. Tomasz z Akwinu, doskonały komentator Arystotelesa i tylu innych. Kto chce nabyć pewne pojęcie o całokształcie tej epoki, ten z korzyścią przeczytać może książkę prof. Twardow-

skiego p. t. „Filozofja średniowieczna“. Nas zajmują szczególnie: Roger Bacon (1214—1294) i William Occam (1270—1347).

Franciszkanin Roger Bacon (oczywiście nie mający nic wspólnego z Franciszkiem Baconem, który żył o trzysta lat później), zasługuje na największą uwagę, jako jeden z pierwszych, którzy zauważyli, że trzeba badać przyrodę. Arystoteles także uznawał za rzecz bardzo ważną badanie przyrody. Można nawet powiedzieć, że, o ile Platon był matematykiem, o tyle Arystoteles był przyrodnikiem; wskazuje na to chociażby jego syllogistyka która jest teorją klas, odpowiadającą klasyfikacji przyrodniczej. Doświadczenie jednak i obserwacja grają u Arystotelesa rolę podrzędną. Tymczasem Roger Bacon pilnie na nie zwraca uwagę; znajdujemy w jego pismach pojęcie o indukcji. Zwracając się ku przyrodzie, nie ufał on autorytetom. On również, jeden z pierwszych, wystąpił przeciwko opieraniu się na tłumaczeniach. „Jak można, pyta się, poznać myśli Arystotelesa i arabskich filozofów, jak można objaśniać Pismo św., jeśli się nie zna języków, w których dzieła te były pisane, jeśli polega się wyłącznie na przekładach, spaczających tak często myśl oryginału?“

Nieco później żył William Occam, także franciszkanin. Zajął on jasne stanowisko, twierdząc, że teologja nie jest nauką. Dla nas wprawdzie teologja jest nauką. Od innych nauk różni się tylko tem, że uczy niezmienności i nietykalności swych podstaw podczas kiedy gdzie indziej wolna krytyka może jutro odrzucić wszystkie zasady, na których dziś stoi nauka, jeśli tylko je uzna za złe. Occam jednak nazywał nauką tylko taką teorję, która wychodzi z przesłanek, danych przez doświadczenie. To stanowisko Occama było ważnem, ponieważ rozcinało nić, łączącą filozofję z teologją.

Occam głosił zasadę, znaną pod nazwą „brzytwy Occama“, podług której nie należy mnożyć bytów bez konieczności, t. j nie należy przypuszczać nic takiego, co nie jest potrzebnem do wyjaśnienia znanych faktów. Zasadę tę zastosował do idei Platona: Occam był nominalistą.

Nie znamy logiki Occama; należy jednak przypuszczać, że ten człowiek miał jasne pojęcie o dowodzie, skoro twierdził, że istnienia Boga dowieść nie można. Nie należy jednak myśleć, jakoby Occam był ateistą. Przeciwnie, z tem wszystkiem łączyła się u niego bardzo głęboka wiara, w znacznej może części dzięki oryginalnej doktrynie o dwoistości prawdy. Mniemał on bowiem, że

istnieją obok siebie dwie niezależne i niekoniecznie ze sobą zgodne prawdy: naukowa i objawiona.

Odrodzenie nauk w Europie, a w szczególności szybkie postępy przyrodoznawstwa, zrodziły wśród uczonych nowożytnych przekonanie, iż logika scholastyczna nieprzydatną jest przy badaniu przyrody. Stąd powstała wspomniana już przez nas zażarta walka z filozofją scholastyczną, a więc i z powagą Arystotelesa. Nowe idee w obrębie logiki były najjaskrawiej wyrażone w „Nowym Organonie“ Franciszka Bacon'a (1561—1626). Dzieło to, zaznaczając bezużyteczność logiki scholastycznej, nawoływało do obserwacji i doświadczeń, aby z dobytych tą drogą danych przez stopniowe uogólnienia wybudować naukę o przyrodzie. W ten sposób powstała t. zw. logika indukcyjna, która obecnie stanowi pewną część każdego prawie podręcznika logiki.

Byłoby jednak błędem myśleć, iż idee, wyrażone w dziele Bacon'a odrazu zostały przyjęte przez logików; rozwój nauki nie jest tak prosty. Przedstawia się on w postaci wielu ścierających się prądów, z których pewne chwilowo znikają, aby po niejakim czasie znowu się ujawnić. Tak i po Baconie powrócono na przeszło dwa wieki do dawnej logiki, z tą tylko różnicą, że podczas gdy u Arystotelesa łączyła się z metafizyką, teraz nadano jej raczej charakter po części formalny a po części psychologiczny.

Mówimy tu o czasie, w którym rolę najwybitniejszą odgrywali filozofowie — matematycy: Descartes (1596—1650) i Leibniz (1646—1716). Wprawdzie żaden z nich nie napisał traktatu o logice, ale obaj wiele jej miejsca poświęcali w swych pismach, które z tego względu posiadają wielką doniosłość. Pod wpływem tych filozofów zostały ułożone także traktaty logiki. Uczniowie Kartezjusza, Nicole i Arnauld, wydali bezimiennie w r. 1662 słynne dzieło „La logique ou l'art de penser“, które się zwykle nazywa logiką Port Royal'a od miejsca pobytu autorów. Z uczniów Leibniz'a zasługują na uwagę: Lambert i Wolff. Ten ostatni napisał kilka traktatów logiki, o treści bardzo zbliżonej do większości współczesnych podręczników.

Znacznie później, bo w pierwszej połowie ubiegłego stulecia, żył Bernard Bolzano. Czterotomowy jego traktat logiki p. t. „Wissenschaftslehre“ ogłosili uczniowie bez jego wiedzy. Jest to dzieło tak poważne, iż wszystkie inne wydają się przy niem jakby dziecinnemi. Znakomite to dzieło dopiero stosunkowo niedawno zwró-

ciło na siebie uwagę filozofów dzięki książce Husserl'a p. t. „Logische Untersuchungen". Husserl, który przyszedł do logiki, wychodząc z badań nad podstawami matematyki, cenił Bolzano'a, jako autora nielicznych wprawdzie i bardzo niewielkich, ale bardzo donios łych prac matematycznych. W jednej z nich Bolzano ustanawia nowe pojęcie matematyczne kresu górnego i dolnego, wychodząc z tej myśli, która tkwi w argumentach Zenona, iż niezawsze istnieje liczba największa albo najmniejsza, jeżeli ilość liczb rozpatrywanych jest nieskończona. Jedną z przyczyn długiego ignorowania dzieł Bolzano'a jest ta okoliczność, że Bolzano, jako myśliciel bardzo trzeźwy, oceniał nader krytycznie modne podówczas nauki metafizyków niemieckich, zwłaszcza zaś Hegla. Drugą przyczyną była wielka i prawdziwa skromność Bolzano'a, który nie dbał o rozgłos i z którego dzieł, nieliczne tylko zostały wydane. Z tych ostatnich na szczególną uwagę zasługuje broszurka p. t „Paradoksy nieskończoności", zajmująca się kwestjami, należącemi dzisiaj do teorji mnogości.

Bolzano jest jedną z tych postaci ludzkich, na których warto zatrzymywać uwagę, gdyż obraz ich życia pokrzepia naszego ducha. Jego działalność matematyczna przypada na okres, w którym tworzył na nowo matematykę Augustyn Cauchy. W jego „Cours d'analyse algébrique" (Paryż, 1828) znajdujemy nareszcie jasno sformułowane pojęcie granicy, ciągłości i t. d., ale Bolzano go wyprzedził: Cauchy nie znał górnego i dolnego kresu. Po pewnym czasie jednak Bolzano, zastanowiwszy się, jaki ma wybrać zawód, aby najlepiej służyć ludzkości, został księdzem i objął katedrę teologji na uniwersytecie praskim. Pod wpływem denuncjacji, rząd upatrzył różnice pomiędzy jego wykładem a tym, który aprobowały władze kościelne. Chcąc się go więc pozbyć z tego stanowiska, zaproponowano mu katedrę matematyki w Wiedniu; ale on jej nie przyjął. Nie chcąc zaś odwołać tego, co się rządowi nie podobało, musiał wziąć dymisję, poczem przeważną część życia spędził na wsi.

Bolzano'a „Wissenschaftslehre" jest pisana ogromnie obszernie, ale bynajmniej nie rozwlekle; pochodzi to stąd, iż wykład jest niezmiernie sumienny. W każdej kwestji przytacza autor zdania wszystkich ważniejszych pisarzy: stanowi więc książka rodzaj encyklopedji. Wykład zbliżony jest do ogólnego typu logiki scholastycznej; o indukcji mówi Bolzano tylko podług Arystotelesa.

Kto pragnie bliżej zaznajomić się z osobą i działalnością Bol-

zano'a, tego odsyłamy do jego znakomitej autobiografji lub do dzieła Bergmann'a p. t. „Das philosophische Werk Bernhard Bolzanos"; kto zaś umie po czesku, może z korzyścią przeczytać życiorys, napisany przez Marję Červinkową.

Do Baconowskiej indukcji nawrócił J. S. Mill (1806—1873), w pełni już należący do XIX wieku. Jego logika wyszła w r. 1843 (pierwsze wydanie). Dzieło to zawiera teorję dedukcji i teorję indukcji. W teorji dedukcji Mill rozwija swój pogląd na istotę syllogizmu, polegający na tem, iż syllogizm nie może wzbogacać naszej wiedzy, bo konkluzja już jest zawartą w jednej z przesłanek (większej). Tak n. p. przesłanki:

Wszyscy ludzie są śmiertelni
Sokrates jest człowiekiem

dają konkluzję:

Sokrates jest śmiertelny,

ale konkluzja ta musi być przedtem znana, gdyż w przeciwnym razie nie moglibyśmy twierdzić, że każdy człowiek jest śmiertelny. Ta krytyka nie jest nową, bo podali ją już sceptycy starożytnej Grecji. Ale zarzut nie jest słusznym, bo gdybyśmy nie mieli drugiej przesłanki (mniejszej), t. j. gdybyśmy nie wiedzieli, że Sokrates jest człowiekiem, to nie moglibyśmy wyciągać konkluzji; konkluzja nasza nie zawiera się zatem w żadnej z naszych przesłanek zosobna, a tylko w obydwóch wziętych razem. Fałszywą zaś jest myśl, że większa przesłanka, jako zdanie ogólne, może być przyjęta wyłącznie na podstawie zbadania wszystkich przedmiotów, podpadających pod ogólne pojęcie. Ogólne zdania mogą być temi zdaniami zasadniczemi, przyjmowanemi bez dowodu, mogą też być definicjami. Faktem jest, że n. p. w matematyce niemal nigdy nie dowodzimy twierdzenia przez sprawdzenie go w każdym wypadku z osobna! Możemy wreszcie wnioskować ze zdań, podlegających badaniu i w tym celu przyjętych hipotetycznie.

Przy tej sposobności można poruszyć pytanie dość ważne: Czy nauka dedukcyjna — matematyka naprzykład — prowadzi do nowych prawd? Jest rozpowszechnionem wśród nie-matematyków mniemaniem, iż nowe prawdy powstają tylko jako takie syntezy, które nie dają się czysto dedukcyjnie wyprowadzić ze znanych już przesłanek. Jest to nieporozumienie, które tkwi w nieokreśloności terminu „nowy". Każda synteza, która jest dotychczas nieznana,

jest nową, zupełnie niezależnie od tego, czy da się dedukcyjnie sprawdzić, czy nie. Zanim wykryto np. identyczność:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2,$$

nikt o tem nie wiedział i była to prawda nowa, kiedy pierwszy raz wyszła na jaw.

Wracając jeszcze do Mill'a, nadmieniamy, iż w teorji indukcji podaje on metody badania indukcyjnego. Odtąd każdy niemal podręcznik logiki zawiera tę teorję indukcji, ustanawiającą prawidła, które się zwykle nazywa prawidłami Mill'a. Jakkolwiek trudno się zgodzić z Millem co do poglądu na dedukcję, a prawidła indukcji zbyt są ogólne, aby mogły znaleźć rzeczywiste zastosowanie w badaniu przyrody, niemniej jednak logika jego zawiera tak dużo oryginalnych i trafnych poglądów i myśli, ze dziś jeszcze zasługuje na czytanie.

Nieco młodszy od Milla St. Jevons (1835—1882) napisał następujące dzieła logiczne, należące do najlepszych z tego zakresu:

1° Logic (1-sze wyd. 1876) [Istnieje polski przekład].

2° Elementary lessons in logic deductive and inductive (1-sze wyd. 1870).

3° The principles of science. A treatise on logic and scientific method (1-sze wyd. 1874).

4° Pure logic and other minor works (wydanie pośmiertne artykułów od roku 1864, które ukazało się w r. 1890).

5° Studies in deductive logic (1-sze wyd. 1880).

Z tych dzieło, wymienione pod 2°, do niedawna służyło, a i dotąd, zdaje się, służy za podręcznik logiki w szkołach angielskich. Pierwsze, to krótki, ale bardzo jasny i dowcipnie napisany zarys logiki. Dzieło ad 3° uwzględnia wszystkie prace Jevons'a, także z zakresu logiki matematycznej. Temu ostatniemu przedmiotowi przeważnie poświęconem jest następne przez nas wymienione dzieło. Ostatnie jest zbiorem ćwiczeń.

Nie jesteśmy w stanie przytoczyć tutaj wszystkich, albo chociażby najważniejszych traktatów logiki, jakie w ostatnich czasach ukazały się na obu półkulach ziemi. Nadmieniamy tylko, iż za najlepsze ze współczesnych, zachodnio-europejskich dzieł tego rodzaju uważamy logikę („Logik“) Sigwart'a (1818—1905). Słabszą, naszem zdaniem, jest część pierwsza, zwłaszcza logika klasyczna, gdzie autor, ulegając panującym w nauce prądom, usiłuje zastąpić teorję

syllogizmu konstrukcją nową, daleko mniej pożyteczną, niż stara teorja. Natomiast metodologja jego zawiera dużo bardzo pięknych myśli.

Zwracamy się teraz do literatury polskiej. Naszem zdaniem zasługują na uwagę trzy polskie podręczniki logiki, które należą do najlepszych wogóle i nie ustępują w niczem dziełom zagranicznym. Są to:

1° Lutosławskiego „Logika ogólna" (1907).

2° ks. Gabryla „Logika ogólna" (1912).

3° Biegańskiego „Teorja logiki" (1912).

Z nich najbardziej polecamy książkę Lutosławskiego. Część pierwsza ma charakter metafizyczny, ale część druga zawiera najlepszy ze znanych nam wykładów logiki tradycyjnej, formalnej. Kogo zajmują inne pytania w logice tradycyjnej, ten znajdzie na nie odpowiedź w dziełach ks. Gabryla i Biegańskiego. Wykład u Biegańskiego jest bardzo piękny i zajmujący, ale w logice formalnej zawiera grube błędy, które w swojem miejscu dokładnie omówimy, gdyż badanie ich jest nader pouczającem.

Tak mniej więcej przedstawia się rozwój logiki tradycyjnej. Dokładniejszą jej historję znaleźć można w książce Prandtl'a p. t. „Geschichte der Logik". Jest to dzieło bardzo poważne Żałować tylko można, iż autor, bardzo surowy i zawzięty, co chwila szafuje takiemi wyrażeniami, jak „głupstwo". „bezsens" i t. p., a o logice formalnej wogóle mówi wprost. że ją „należałoby nogami podeptać"! O stanie obecnym logiki poinformować się można z pierwszego tomu wydawanej przez Ruge'go „Encyklopädie der philosophischen Wissenschaften". Jest to pismo zbiorowe, w którem współdziałało sześciu wybitnych uczonych, mianowicie: Windelband, Royce, Couturat, Croce, Enriques i Łosskij. Daje ona obraz ścierania się dwóch prądów: psychologicznego i formalnego. Najskrajniejszym przedstawicielem pierwszego z nich był Niemiec Lipps (niedawno zmarły). Formalistą był już właściwie Bolzano; obecnie kierunek ten przedstawia Husserl.

Tyle o logice tradycyjnej. wywodzącej się od Arystotelesa. Obok niej rozwijała się t. zw. logika matematyczna czyli logistyka. Poświęconą jej w całości jest druga część niniejszego dzieła. Narazie o jej rozwoju wzmiankujemy tylko tyle, ile potrzeba. aby resztę zrozumieć. Logikę matematyczną znał już Leibniz, ale nikt o tem nie wiedział. Można powiedzieć. że odkrył ją na nowo ma-

tematyk angielski Boole w pierwszej połowie XIX w. Punkt widzenia jego, jak to najczęściej bywa u Anglików, był właściwie psychologiczny. Chodziło mu o prawa myślenia, t. j. rachunek, któryby pozwolił rozwiązywać pewne zagadnienia logiczne. W rzeczywistości, zakres jego badań obejmował tylko część dzisiejszej logistyki, zwaną algebrą logiki.

Do rozwoju logiki matematycznej w wysokim stopniu przyczyniło się odkrycie geometrji nieeuklidesowej. Jeden bowiem z postulatów geometrji budził oddawna pewne wątpliwości. Chodziło o to, czy jest on takim samym aksjomatem, jak inne, czy też może da się udowodnić przy ich pomocy? Jest to aksjomat o linjach równoległych, t. zw. postulat Euklidesa. W Elementach Euklidesa jest on podany w postaci stosunkowo zawiłej; jest on jednak równoważny twierdzeniu następującemu: Jeżeli mamy linję prostą i punkt na niej nie leżący, to przez ten punkt przechodzi jedna i tylko jedna prosta do powyższej linji prostej równoległa. Bardzo wiele było prób uzasadnienia tego na podstawie innych postulatów geometrji, ale żadna się nie udawała. Po długich wiekach doszli więc matematycy do przekonania, że ten postulat nie wynika z pozostałych. Nie zajmiemy się tu historją tego odkrycia, nadmieniamy tylko, że pierwszym, który powziął śmiałą myśl odrzucenia tego aksjomatu był Łobaczewski, Rosjanin polskiego pochodzenia.

Zbudował tedy Łobaczewski geometrję bez postulatu Euklidesa. Okazało się, iż można stworzyć geometrję zakładając, że przez jeden punkt, nie leżący na danej prostej, przechodzi nieskończenie wiele prostych do niej równoległych, t. j. jej nie przecinających. Taka geometrja jest bardzo oryginalna: niema w niej n. p. kwadratu ani wogóle takiego czworoboku, któryby miał sumę kątów równą czterem prostym, suma zaś kątów w trójkącie jest zmienna ale zawsze mniejsza od dwóch prostych. Są w tej geometrji i inne osobliwości; ale, jakkolwiek daleko ją rozwijano, nie natrafiono na sprzeczności. Później zaś inni matematycy, przez znalezienie pewnej interpretacji dla terminów tej geometrji, udowodnili, że sprzeczność w jej postulatach jest niemożliwą.

Odkrycia te, pochodzące z pierwszej połowy XIX wieku, powoli się rozwijały i niełatwo też się rozpowszechniały. Krytyka formalnie prześladowała Łobaczewskiego; publicyści dowodzili, że zwarjował. Współczesny Gauss niezależnie od niego doszedł do tych samych myśli, ale obawiał się z niemi publicznie wystąpić.

albo chociażby tylko potwierdzić nauki Łobaczewskiego; jedynie w rozmowach prywatnych wyrażał niekiedy swoje poglądy na te sprawy. W liście do przyjaciela tłómaczy się obawą przed „krzykiem Beotyjczyków“.

Odkrycia Łobaczewskiego dokonały istotnego przewrotu w poglądach na matematykę. Dawniej bowiem pospolicie mniemano, iż matematyka jest nauką o liczbie i przestrzeni. Po Łobaczewskim jednak okazało się, iż matematyka jest nauką o związku logicznym. Zarazem obalone zostały poglądy Kanta na matematykę Dowody twierdzeń u Łobaczewskiego są ogromnie oryginalne, gdyż intuicja nasza tutaj zawodzi, trzeba więc badać związek logiczny, bez względu na nią. Jest rzeczą zrozumiałą, jak bardzo tego rodzaju rozumowania mogły się przyczynić do rozwoju logiki i wzmocnienia jej związku z matematyką.

Wszystkie te rzeczy pogłębiły myślenie matematyków i logików, znających się na matematyce. Są jednak logicy, na których wspomniane prądy nie wywarły żadnego wpływu. Jeszcze dzisiaj czytać można w niektórych książkach niemieckich drwiny z „matematyzujących“ — jak oni to nazywają — logików! Pomimo to zainicjowany został nowy okres w historji logiki. Dominują tutaj prace Frege'go, profesora matematyki na uniwersytecie w Jenie (ur. 1848) i Peano'a profesora analizy matematycznej na uniwersytecie w Turynie (ur. 1858), niezależne zresztą od siebie; z prac zaś obu korzystał Anglik, B. Russell.

Peano wyszedł z tej uwagi, że błędy w matematyce najczęściej pochodzą stąd, iż twierdzenia nie są dokładnie wyrażane; zwłasza poprzedniki bywają niezupełne. Wiele rzeczy uważa się za same przez się zrozumiałe; czasami jednak o nich zapominamy i stąd powstają błędy. Szczególnie częste są n. p. błędy powstające stąd, że zapominamy, iż przez zero dzielić nie można; spotykamy je czasami u najwybitniejszych matematyków. Peano sądził, iż można będzie temu zapobiegać przez układanie formularzy, t. j. spisów twierdzeń matematycznych, gdzieby każde twierdzenie było zupełnie dokładnie wyrażone. Wobec jednak wieloznaczności i rozwlekłości, zwyczajnej naszej mowy, o ile chodzi o takie rzeczy, potrzebnem było pismo pojęciowe, od niej niezależne. W ten sposób powstała ideografja Peanowska, z niej zaś, i zawsze w związku z nią, rozwinęła się logika. Liczba symboli wspomnianego pisma

ideograficznego jest zmienną, zależnie od zakresu, w którym się obracamy; w każdym razie jednak około dziesięciu symboli wystarcza, aby wyrugować słowa.

Frege przyszedł do tej samej myśli, ale podstawy jego są głębsze: chodziło mu nie tyle o formułowanie twierdzeń, ile o ich dowody, mianowicie dowody zupełne. Pisma jego w zakresie logiki są następujące:

1. Begriffsschrift (1879)
2. Function und Begriff (1891)
3. Über Begriff und Gegenstand (1892)
4. Über Sinn und Bedeutung (1892)
5. Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik (1895)
6. Grundgesetze der Arithmetik (1 tom — 1893; 2 tom — 1903).

Prace te dotyczą rozmaitych bardzo ważnych pojęć logicznych. Pierwszych pięć prac umieszczonych zostało w różnych czasopismach naukowych, szósta zaś, to główne, dwutomowe dzieło Frege'go, zawierające najważniejsze wyniki tamtych i stanowiące próbę uzasadnienia matematyki, opartego jedynie na logice. Jest ono napisane ideografją nadzwyczaj subtelną i dokładną. Niestety, jest ona tak trudną i zawiłą, że dzieła Frege'go są nie do czytania.

Z tego powodu Russell, pisząc dzieło p. t. „The principles of mathematics“ (1903), nie mógł się zdecydować na użycie ideografji Frege'go; zastosował on udoskonaloną symbolikę Peany. Wspomniane dzieło jest dziełem krytycznem, w którem autor wypowiada wszystkie swoje wątpliwości. Z tego powodu dzieło to jest bardzo trudnem do czytania i w każdym razie nie nadaje się dla początkujących, natomiast dla badacza jest książką nieocenioną. Miał się ukazać drugi tom tego wydawnictwa. Zamiast tego jednak przystąpił Russell, wspólnie z matematykiem Whitehead'em do opracowania monumentalnego dzieła p. t. „Principia mathematica“. Tylko tytuł tego dzieła jest łaciński. Tekst jest prawie wyłącznie pisany udoskonaloną ideografją Peanowską a nieliczne komentarze są po angielsku. Pierwszy tom tego wydawnictwa ukazał się w r. 1910, drugi w r. 1912, trzeci w r. 1913, czwarty zaś w ostatnich czasach wydał sam Whitehead. Jest to właściwie dzieło matematyczne; jednakże pierwsza połowa pierwszego tomu zawiera wykład logiki.

Całość, podobnie jak „Grundgesetze“ Frege'go stanowi próbę uzasadnienia podstaw matematyki, w oparciu o samą tylko logikę. Dzieło to nazwać można genjalnem. Jest ono jednak niesłychanie trudnem do czytania. Pozatem są pewne niejasności. W części, traktującej o teorji typów, są ustępy, gdzie autorowie w nawiasie dodają: „Właściwie to jest niezupełnie tak“. Jakże to więc jest, jeśli jest „niezupełnie tak“!?

ROZDZIAŁ IV.

# Wstęp do logiki Arystotelesa.

Wspominaliśmy już wyżej, iż syllogistyka Arystotelesa podaną będzie w postaci scholastycznej. Uzasadnienie jednak naszych twierdzeń będzie w znacznej mierze inne, korzystać bowiem będziemy także z najnowszych wyników w tej dziedzinie. Niniejszy zaś rozdział poświęconym będzie rzeczom, które Arystoteles, a za nim i scholastycy, albo całkiem pomijali, albo bardzo krótko zbywali. Są to pytania nadzwyczaj trudne, które są prawdziwym krzyżem logików. Pytania te odnoszą się do pojęcia klasy. W teorji klas powstają istotnie najrozmaitsze antynomje czyli paradoksy, z któremi logicy wiele już mieli kłopotu.

Pozornie nic łatwiejszego, niż powiedzieć, że klasa jest to zbiór przedmiotów, posiadających pewne właściwości. Ale co to jest zbiór? Jeżeli definicję tę, pozornie niewinną, głębiej rozważyć, to wychodzi na jaw cały szereg trudności. Już de Morgan, nauczyciel matematyki Jevons'a, zauważa, iż we wszystkich badaniach ograniczamy się do pewnego zakresu rzeczy, nie rozważając wcale innych przedmiotów; tak n. p. w arytmetyce ograniczamy się do rozpatrywania pewnych kategoryj liczb. W logice zaś rozważamy to, co Boole nazywa „the univers of discours“ — wszechświat mowy. Logicy zazwyczaj chcą rozważać świat mowy niezamknięty, obejmujący wszystkie pojęcia. Antynomje jednak nie mogą być, naszem zdaniem, usunięte bez ograniczenia świata mowy. Pogląd ten nie jest ogólnie przyjętym. Dowodem tego teorja typów Russell'a, która, jak się zdaje, jest właśnie próbą usunięcia konieczności ograniczania świata mowy. Trzeba jednak przyznać, że teorja ta jest bardzo ciemną.

Skoro jest mowa o teorji klas, należy zaznaczyć. iż nie może ona być podstawą logiki. Aby ją bowiem rozwinąć, musimy się po-

sługiwać dowodami, ale dowody nie mogą być prowadzone bez teorji zdań; w ten więc sposób teorja klas opiera się na teorji zdań. Teorja zdań jest bowiem podstawą każdej teorji dedukcyjnej. Z tym faktem wiąże się pewna trudność. Zdawałoby się bowiem, że w takim razie musimy teorję zdań poznać przed każdą teorją dedukcyjną; a że ona sama jest taką — musimy ją poznać przed nią samą! Okazuje się jednak, że teorja zdań o tyle jest tutaj wyjątkiem, iż można, na początku jej wykładu przyjąć, jako aksjomaty, bardzo nieznaczną liczbę twierdzeń, które zarazem służą nam jako pierwsze sposoby rozumowania. W miarę zaś, jak się posuwamy naprzód, zwiększa się różnorodność sposobów rozumowania, albowiem każde twierdzenie w ten sposób udowodnione, występuje, w dalszym ciągu, w dwojakim charakterze przesłanki i sposobu rozumowania. Do tej kwestji powrócimy zresztą jeszcze później.

Z tego, co wyżej powiedzieliśmy, wynika, iż ściśle naukowy wykład syllogistyki wymagałby uprzedniego wyłożenia teorji zdań. My jednak uczynić tego nie możemy, albowiem teorja ta, obejmująca, w zwyczajnym zakresie, mimo względnej prostoty, dwieście z górą twierdzeń wraz z dowodami, które musielibyśmy zapisywać zapomocą ideografji, stanowiłaby, dla nieprzygotowanego czytelnika, zbyt znaczną trudność u wstępu. Ale twierdzenia teorji zdań są wszystkie oczywiste. Możemy je zatem bez trudności przyjąć intuicyjnie, rezygnując narazie z absolutnej ścisłości dowodów i uwidocznienia wszystkich ich podstaw, do czego dojdziemy dopiero w drugiej części niniejszego dzieła.

Możemy się pocieszać tem, że w ogólności we wszelkiem rozumowaniu, nie wyłączając matematycznego, intuicja odgrywa olbrzymią rolę. W normalnym dowodzie matematycznym przyjmuje się zawsze wszelkie przesłanki logiczne w sposób intuicyjny. Ale przyjmuje się także zazwyczaj cały szereg innych rzeczy. W szczególności w geometrji opieramy się nadzwyczaj często na intuicji przestrzennej. Faktem jest n. p., że w każdym podręczniku szkolnym geometrji przyjmuje się intuicyjnie własność prostej, polegającą na tem, że dzieli płaszczyznę, na której leży, na dwie części, a jeśli jakaś druga prosta przecina ją w jakimś punkcie, to przechodzi w tym punkcie z jednej z tych części płaszczyzny na drugą. Przyjmuje się również intuicyjnie to, że odcinek, łączący punkt wewnętrzny trójkąta z punktem zewnętrznym, przechodzi przez jeden z wierzchołków trójkąta albo przecina jeden z jego boków. Są

to jednak rzeczy, grające istotną rolę w wielu dowodach, a przytem nie tak proste.

Mimo, iż w wykładzie syllogistyki nie będziemy się powoływali na twierdzenia z teorji zdań, musi być zdanie punktem wyjścia naszych rozważań. O samem pojęciu zdania napisano całe tomy. Arystoteles określa zdanie jako to, co jest prawdą lub fałszem. Należy więc odróżnić zdanie logiczne od zdania gramatycznego, które jest pojęciem szerszem; w szczególności rozkaz, pytanie, mimo, iż jest zdaniem gramatycznem, nie jest zdaniem w sensie logiki. To jednak, co powiedział Arystoteles, nie może być uznane za definicję zdania; wymienił on tylko pewną własność tego pojęcia. Własność ta stanowi prawo wyłączonego środka. Prawo wyłączonego środka uzupełnia prawo sprzeczności, które wyraża, iż żadne zdanie nie może być zarazem prawdziwem i fałszywem. Połączenie obu tych praw stanowi dysjunkcję podstawową. Każde zdanie jest prawdziwe albo fałszywe. Przypisujemy więc każdemu zdaniu jedną i tylko jedną ocenę logiczną. Prawo wyłączonego środka wyraża, że przynajmniej jedną, prawo zaś sprzeczności — że najwyżej jedną. Należy zwrócić tutaj uwagę na różnicę w znaczeniu wyrazów „lub“ i „albo“. Pierwszy z nich oznacza dysjunkcję, w której oba człony się nie wyłączają; w matematyce używa się prawie zawsze takiej dysjunkcji. Przeciwnie, wyrazu „albo“ używa się w dysjunkcjach, w których człony wyłączają się wzajemnie, t. j. zachodzi jedna i tylko jedna z powyższych ewentualności. Na rozróżnieniu znaczenia „lub“ i „albo“ polega różnica między prawem wyłączonego środka a dysjunkcją podstawową. Polskie „lub“ odpowiada łacińskiemu „vel“, „albo“ zaś — łacińskiemu „aut“. Arystoteles, który, jak wspomnieliśmy, prawo wyłączonego środka przyjmował za definicję, uważał logikę za opartą na prawie sprzeczności tylko; dla nas jednak logika będzie opartą na dysjunkcji podstawowej.

Pojęcia zdania i klasy wiąże ze sobą trzecie, bardzo ważne i podstawowe, pojęcie funkcji logicznej, czyli jak mówią Whitehead i Russell, funkcji propozycjonalnej. Zarodek tego pojęcia spotykamy już u Bolzano'a. Mianowicie, zastanawiając się nad pojęciem wynikania, wpada on na pomysł odmiany jednego terminu w zdaniu. Stąd tylko jeden krok do pojęcia, do którego on jednak nie doszedł, pojęcia zdania nieokreślonego, w którem ten termin jest zastąpionym przez zmienną czyli indeterminatę — puste miejsce, jak się

wyraża Frege. To już nie jest zdanie, to jest właśnie funkcja logiczna. Wyrażenie n. p.

$x$ dzieli się przez *2*

jest taką funkcją a $x$ jest zmienną. Nie jest to zdanie, bo nie jest ani prawdą ani fałszem. Zdanie otrzymamy dopiero przez wstawienie za $x$ jakichś wartości liczbowych. Jeżeli n. p. wstawimy liczbę 3, otrzymamy zdanie fałszywe, a jeśli wstawimy liczbę 4, otrzymamy zdanie prawdziwe.

Funkcji logicznej odpowiada pewien świat mowy, z którego możemy brać te stałe, któremi zastępujemy zmienną, w niej zawartą; terminy z poza tego świata mowy dają nie zdanie tylko nonsens. W powyższym przykładzie światem mowy, z naszego punktu widzenia, jest ogół liczb całkowitych. Każda funkcja logiczna dzieli odnośny świat mowy na dwie części. Pierwsza z nich składa się z terminów, które, wstawione do funkcji, dają zdanie prawdziwe; druga z terminów, które dają zdania fałszywe. Pierwsza z tych części świata mowy stanowi klasę, określoną przez daną funkcję logiczną. Gdy mówimy, iż jakiś termin jest osobnikiem powyższej klasy, znaczy to, iż, wstawiony do odpowiedniej funkcji, daje zdanie prawdziwe. Taki jest związek pomiędzy funkcją logiczną a klasą.

Gdy chcemy wypowiedzieć zdanie o każdym osobniku jakiejś klasy, używamy terminu klasowego. Uważajmy n. p. klasę, określoną funkcją „$x$ dzieli *6*"; osobnikami tej klasy są liczby:

*1*, *2*, *3*, *6*.

Imieniem wspólnem tych liczb, czyli terminem klasy, z nich złożonej, będzie wyrażenie: „dzielnik liczby 6". Zapomocą terminu klasowego możemy wypowiadać zdania ogólne, jak n. p. „Dzielnik liczby 6 jest liczbą jednocyfrową". Mówiąc przytem: „dzielnik liczby 6" nie mamy na myśli żadnej z osobna z liczb, podpadających pod to pojęcie, lecz wszystkie razem. Dla oznaczenia powyższych pojęć, będziemy się posługiwali literami. Tak więc mała litera, n. p. $a$, będzie oznaczała termin klasowy, a ta sama litera, ujęta w nawias — w danym razie $(a)$ — będzie oznaczała odpowiednią klasę.

Zdawałoby się, iż klasa i termin klasowy, są to tak różne rzeczy, że niepodobna ich pomieszać; a jednak wniosek ten byłby mylnym. N. p. uczeń Peano'a, C. Burali-Forti, we wstępie do swej książki p. t. „Logica matematica" mówi wprawdzie o klasach i terminach klasowych, ale pojęć tych dostatecznie nie rozróżnia. Arystoteles operował terminami klasowemi, które oznaczał dużemi lite-

rami. Leibniz zaś i Boole posługiwali się klasami. Tymczasem Peano, a za nim wszyscy matematycy włoscy, przyjęli pojęcia Arystotelesa a sposób znakowania Boole'a. Nie umniejsza to wcale zasług Peany i szkoły włoskiej; sprowadza to jednak wielkie zamieszanie. Przynależność przedmiotu $x$ do klasy $a$ oznacza Peano symbolem

$$x \varepsilon a$$

i czyta to: $x$ jest $a$. Właściwie jednak ma być: „$x$ jest osobnikiem klasy $a$“. My, w wykładzie syllogistyki, operować będziemy terminami klasowymi; mamy więc prawo czytać: $x$ jest $a$.

Z pojęciem klasy związana jest bardzo poważna aporja, podana po raz pierwszy przez Rusell'a we wstępie do „Principles of mathematics“. Jak bardzo jest ona poważną, świadczy fakt, że Frege w zakończeniu „Grundgesetze“, wspomina o niej uwagą: „Ciężko jest badaczowi widzieć pod koniec, że podwaliny jego dzieła są zachwiane“. Aporja ta jest znana pod nazwą antynomji Russell'a; możnaby ją także nazwać aporją nieograniczonego świata mowy.

Aporja ta byłaby niezrozumiałą bez odpowiedniego przygotowania. Postawmy więc sobie najpierw pytanie, czy może istnieć klasa, będąca swoim własnym osobnikiem? Odpowiedź będzie twierdzącą tylko w wypadku nieograniczonego świata mowy; w tym jednak wypadku nie trudno o przykład: weźmy n. p. klasę wszystkich nie-ludzi. Klasa tą niewątpliwie człowiekiem nie jest; jest więc nie-człowiekiem, t. j. jest swoim własnym osobnikiem. Klasa wszystkich klas również byłaby swoim własnym osobnikiem. Zawsze jednak będą i klasy. nie będące swoimi własnymi osobnikami. Russell rozważa właśnie klasę wszystkich klas, nie będących swoimi własnymi osobnikami. Jeżeli klasę tę oznaczymy literą $R$, to, ideograficznie, definicja jej da się przedstawić w postaci następujących dwóch, wzajemnie odwrotnych zdań warunkowych:

$$\begin{cases} K \varepsilon R \,.\supset.\, \sim(K \varepsilon K) \\ \sim(K \varepsilon K) \,.\supset.\, K \varepsilon R. \end{cases}$$

Znak $\sim$ oznacza tu przeczenie zdania, $K$ zaś jest zmienną, oznaczającą 'dowolną klasę, Pytamy się teraz, czy $R$ jest, czy nie jest, swoim własnym osobnikiem? Aby otrzymać odpowiedź wstawiamy $R$ zamiast $K$ do powyższej definicji i otrzymujemy:

$$\begin{cases} R \varepsilon R \,.\supset.\, \sim(R \varepsilon R) \\ \sim(R \varepsilon R) \,.\supset.\, R \varepsilon R \end{cases}$$

A zatem: Jeśli *R* jest swoim własnym osobnikiem, to nim nie jest, a jeśli *R* nie jest swoim własnym osobnikiem, to nim jest. To jest antynomja! Rozumowanie to jednak jest poprawnem pod warunkiem istnienia klasy *R*. Widocznie więc klasa *R* nie istnieje. Powstaje tedy pytanie, kiedy mamy prawo tworzyć jakąś klasę, a kiedy nie? Tę właśnie kwestję stara się rozstrzygnąć w sposób ogólny, a zarazem wykluczający powstawanie antynomji, wspominana już przez nas teorja typów, na której oparte są „Principia mathematica" Russell'a i Whitehead'a.

Chcemy teraz wprowadzić pewne dalsze pojęcia, na których opiera się teorja klas; zwracamy się najpierw do pojęcia przeczenia klasy. Zauważyliśmy już, że funkcja logiczna dzieli świat mowy na dwie części, mianowicie ogół terminów, zamieniających, po wstawieniu ich za indeterminatę funkcję w zdanie prawdziwe — i ogół terminów, zamieniających ją w zdanie fałszywe. Rozważaliśmy przytem ogół tych pierwszych i nazwaliśmy to klasą, odpowiadającą danej funcji logicznej. Możemy jednak rozważać także ogół terminów, zamieniających naszą funkcję w zdanie fałszywe. Jest to także klasa; klasę tę nazywać będziemy przeczeniem poprzednio rozważanej klasy. Jeśli termin jakiejś klasy jest *a*, to termin przeczenia klasy *(a)*, czyli, krócej, przeczenie terminu *a* oznaczeń będziemy symbolem

$$-a;$$

to samo oznaczali scholastycy przez

*non a.*

Z przeczeniem wogóle łączy się wiele dwuznaczności. Za przykład posłużyć może następująca, nietrudna zresztą, aporja, pochodząca jeszcze od Greków. Jeśli się kogoś zapytamy: „Czy przestałeś bić swego ojca?", to powinniśmy otrzymać odpowiedź twierdzącą lub przeczącą. Ale jeśli nasz interlokutor odpowie twierdząco, to znaczy, że poprzednio go bił; jeśli zaś odpowie przecząco, to znaczy, że nie przestał bić, t. j. bije nadal swego ojca. Cóż więc ma odpowiedzieć ten, kto nie bił nigdy swego ojca? Powinien właściwie odpowiedzieć przecząco. Dwuznaczność zaś pochodzi stąd, że przeczenie może się odnosić do całego zdania lub tylko do słowa „przestać"; mamy więc dwa odrębne zdania, jednakowo brzmiące, które, zapomocą nawiasów, możnaby rozróżnić jak następuje:

„Nie [przestaję bić swego ojca]".

„[Nie przestaję] bić swego ojca".

Pierwsze z tych zdań obejmuje przypadek, o który nam chodziło, drugie zaś, przez odniesienie przeczenia tylko do czasownika, nabiera znaczenia: „Biję nadal swego ojca“. Tego rodzaju dwuznaczność ma miejsce zawsze, jeżeli chodzi o zaniechanie jakiegoś działania, zachodzi ona także, jeśli zaniechanie i sama czynność wyrażone są jednem słowem, więc n. p. kiedy się pytamy: „Czy wróciłeś do domu?“

Aby lepiej uprzytomnić sobie znaczenie przeczenia i jego własności, podzielimy świat mowy na trzy części:

$$K_1,\ K_2,\ K_3.$$

Niech teraz (*a*) i (*b*) będą dwie klasy. Przypuśćmy najpierw, że klasa (*a*) jest częścią $K_1$, a klasa (*b*) jest częścią $K_3$. W takim razie, jeśli jakiś termin jest osobnikiem (*a*), czyli należy do tej klasy, to nie należy do (*b*) i odwrotnie; mogą natomiast być terminy, nie należące do żadnej z tych klas (*a*) i (*b*). Stosunek taki wyrażamy, mówiąc, że klasy te wykluczają się wzajemnie. Niech teraz klasa (*a*) obejmuje $K_1$ i $K_2$ a klasa (*b*) — $K_2$ i $K_3$. W takim razie, jeśli jakiś termin nie należy do (*a*), to należy do (*b*) i odwrotnie, t. j. każdy termin świata mowy należy przynajmniej do jednej z tych klas, może jednak należeć do obu. Klasy (*a*) i (*b*) wyczerpują zatem świat mowy. Klasa (*b*) jest przeczeniem klasy (*a*) wtedy i tylko wtedy, gdy wzajemny stosunek tych klas posiada obie wspomniane własności.

Trzeba jednak powiedzieć, że wśród logików, nie zajmujących się matematyką, powszechnie przyjętą jest opinja, jakoby przeczenie klasy, scholastyczne „*non a*“, nie miało określonego sensu. Zdanie to jest słusznem, jeżeli świat mowy jest nieograniczonym; słusznem jednak nie jest, jeśli świat mowy jest ograniczonym. Ale, zdaniem naszem, także samo pojęcie klasy nabiera określonego znaczenia dopiero na tle zamkniętego świata mowy.

W związku z tą ostatnią kwestją, podnieść można pytanie, jakie jest właściwe znaczenie pojęcia klasy; czy klasa istnieje jako jeden przedmiot, czy nie? Klasa n. p. dzielników liczby 6 składa się z liczb

*1, 2, 3, 6.*

Co to jest za połączenie terminów? Czy wogóle klasa istnieje? Nie będziemy tych pytań rozstrzygać. Zaznaczyć jedynie należy, iż pojęcie klasy jest t. zw. pojęciem „in use“, t. j. takiem, które jest

zrozumiałem tylko w niektórych zwrotach. Wiemy n. p. co to znaczy, że jakiś przedmiot jest osobnikiem danej klasy, ale nie wiemy dokładnie, czem jest, w istocie rzeczy, sama ta klasa.

Ale wróćmy do stosunków, zachodzących pomiędzy dwiema klasami. Pragniemy omówić jeszcze jeden stosunek możliwy, mianowicie włączenie klasy do klasy Pojęcie to może być określonem jak następuje: Klasa ($a$) zawiera się w klasie ($b$) wtedy i tylko wtedy, kiedy każdy element klasy ($a$) jest elementem klasy ($b$), t. j. jeżeli jakiś przedmiot jest elementem klasy ($a$), to jest on elementem klasy ($b$). Można to również wyrazić tak: Niech

$$\varphi(x) \text{ i } \psi(x)$$

będą funkcjami logicznemi, określającemi odpowiednio klasy ($a$) i ($b$). Mówimy, iż klasa ($a$) zawartą jest w klasie ($b$) wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi wynikanie

$$\varphi(x) \supset \psi(x)$$

t. j., jeśli zmienną $x$ zastąpimy — w obrębie świata mowy — jakąkolwiek stałą $a$, to zachodzić będzie pomiędzy zdaniami

$$\varphi(a) \text{ i } \psi(a)$$

związek wynikania:

$$\varphi(a) \supset \psi(a).$$

Niech n. p. klasa ($a$) określoną będzie przez funkcję:

$$x \text{ dzieli się przez } 4,$$

zaś klasa ($b$) — przez funkcję:

$$x \text{ dzieli się przez } 2.$$

Widzimy, iż klasa ($a$) jest wówczas zawartą w klasie ($b$), gdyż każda wielokrotność liczby 4 jest wielokrotnością liczby 2, t. j. zachodzi wynikanie

$$x \text{ dzieli się przez } 4 \,.\supset.\, x \text{ dzieli się przez } 2.$$

Z powodu związku, zachodzącego pomiędzy pojęciem włączenia klasy do klasy a wynikania dla zdań czy też funkcyj logicznych, Peano, a za nim szkoła włoska, używa do wyrażenia obu tych rzeczy tego samego znaku, a zatem włączenie klasy ($a$) do klasy ($b$) zapisuje

$$a \supset b.$$

Russell natomiast zachowuje bez zmiany znak Peany dla wynikania, ale odwraca go dla włączenia klasy do klasy, aby tych rzeczy nie mieszać; włączenie więc klasy do klasy zapisuje

$$a \subset b.$$

My, zgodnie z przyjętym przez nas sposobem oznaczenia klas, pisać będziemy:

$$(a) \subset (b).$$

Gdy klasa ($a$) zawiera się w ($b$), stosunek odwrotny może zachodzić albo nie; jeśli zachodzi, to klasy składają się z tych samych osobników, wskutek czego uważamy je za identyczne.

Dawniej nie odróżniano włączenia klasy do klasy od włączenia osobnika do klasy, traktując ten ostatni jako szczególny wypadek włączenia klasy do klasy. Dopiero Frege i Peano zwrócili uwagę na to, iż pojęcia te mają różne własności, a więc żadną miarą identyfikowane być nie mogą. Istotnie, jasną jest rzeczą, iż włączenie klasy do klasy jest przechodniem, t. j. jeśli ($a$) zawiera się w ($b$) a ($b$) — w ($c$), to ($a$) zawiera się w ($c$). Włączenie osobnika do klasy tej własności nie posiada. Dowód tego podaje szkoła włoska w sposób cokolwiek niejasny; rozumowanie jest takie: gdyby rozważana własność się tutaj stosowała, moglibyśmy, z tego, że Piotr jest apostołem a apostoł jest dwunastką, wyciągnąć wniosek, że Piotr jest dwunastką. Przesłanki są prawdziwe — a wniosek nie; wynikanie zatem nie zachodzi, t. j. włączenie osobnika do klasy nie posiada własności przechodniości. Rozumowanie to stanie się bardziej zrozumiałem, jeśli przesłanki wypowiemy tak:

Piotr jest osobnikiem klasy apostołów.

Klasa apostołów jest osobnikiem klasy dwunastek.

Przesłanki te są istotnie prawdziwe; gdyby więc włączenie osobnika do klasy posiadało omawianą własność, Piotr byłby osobnikiem klasy dwunastek. Stąd, że tak nie jest, mamy prawo wnioskować, że włączeniu osobnika do klasy nie przysługuje własność przechodniości.

Na zakończenie, chcemy omówić jeszcze dwa pojęcia, bezpośrednio z pojęciem klasy związane. Chodzi o zakres i treść klasy. Zakresem tedy nazywamy ten sam zbiór osobników, z którego klasa się składa. Tak więc zakresem klasy dzielników liczby sześć jest sam zbiór liczb

$$1, 2, 3, 6.$$

Treścią natomiast klasy jest funkcja logiczna, która ją określa. W powyższym przykładzie treścią rozważanej klasy jest funkcja:

$x$ dzieli 6.

O tych pojęciach pisze Frege w swej rozprawie p. t. „Über Sinn und Bedeutung". „Sinn" (sens) oznacza to samo, co my nazywamy treścią. zaś „Bedeutung" (znaczenie), jest to zakres.

Jak już wspominaliśmy, w wykładzie syllogistyki rozpatrywać będziemy jedynie klasy niepuste, t. j. składające się przynajmniej z jednego elementu; klasy takie posiadają zawsze treść i zakres. Klasy puste natomiast. t. j. te, do których żaden termin nie należy. jak n. p. klasa kół kwadratowych, mają treść ale zakresu nie mają; mimo to, wprowadzenie ich w logice, zwłaszcza w związku z matematyką, jest bardzo dogodnem.

Pomiędzy zakresem a treścią klasy zachodzi osobliwy związek. Mianowicie, im bogatszą jest treść klasy, tem uboższym jest jej zakres i odwrotnie. Istotnie, jeśli chcemy zmniejszyć zakres jakiejś klasy, to musimy funkcję logiczną, określającą tę klasę uzupełnić drugą funkcją. ścieśniając w ten sposób warunki przynależności do klasy. Rozważmy n. p. klasę liczb parzystych, a więc odpowiadającą funkcji

$x$ dzieli się przez 2.

Jeśli z tej klasy chcemy wziąć tylko liczby, podzielne przez 3, to musimy powyższą funkcję uzupełnić funkcją:

$x$ dzieli się przez 3.

Otrzymamy tedy klasę liczb, podzielnych przez 6, o bogatszej treści, ale uboższym zakresie. Można jednak uzupełnić treść klasy w taki sposób, by nie zmniejszyć jej zakresu. Rozważmy n. p. klasę, określoną funkcją:

$x$ dzieli się przez 4;

jeżeli treść jej uzupełnimy funkcją:

$x$ dzieli się przez 2,

to nie zwęzimy zakresu tej klasy, ponieważ nowa funkcja wynika z poprzedniej, t. j. każda wielokrotność liczby 4 jest liczbą parzystą. Można jednak także powiedzieć, że zwiększenie treści było tutaj nieistotnem.

Z powyższego wynika, iż można określić klasę przez podanie funkcji, którą należy uzupełnić treść jakiejś znanej klasy, aby otrzymać treść klasy, o którą nam chodzi. W logice tradycyjnej nazywa się to „definitio per genus proximum et differentiam specificam“; „genus proximum“ jest to ta klasa znana, która występuje w definicji, zaś „differentia specifica“ — to uzupełnienie jej treści.

ROZDZIAŁ V.

# Logika Arystotelesa: wnioskowanie z jednej przesłanki.

Logika tradycyjna rozróżnia cztery podstawowe typy zdań orzekających, które uważane były przez Arystotelesa za te elementy, z których ma się składać ludzkie myślenie. Zdania te oznaczali scholastycy przez pierwsze cztery samogłoski alfabetu łacińskiego i słowami wyrażali jak następuje:

*A* — Omne *S* est *P*. (Każde *S* jest *P*.)
*E* — Nullum *S* est *P*. (Żadne *S* nie jest *P*.)
*I* — Quoddam *S* est *P*. (Niektóre *S* są *P*.)
*O* — Quoddam *S* non est *P*. (Niektóre *S* nie są *P*).

Dzieli się je dwojako. Ze względu na ilość — na ogólne (*A* i *E*) i szczegółowe (*I* i *O*); ze względu na jakość — na twierdzące (*A* i *I*) i przeczące (*E* i *O*). Tak więc zdanie typu *A* jest ogólno-twierdzące. *E* — ogólno-przeczące, *I* — szczegółowo-twierdzące, *O* — szczegółowo przeczące. Termin klasowy *S* nazywa się podmiotem (subiectum), *P* — orzeczeniem (praedicatum); termin „jest“, względnie „nie jest“ nazywa się łącznikiem (copula). Zdania orzekające będziemy pisali w postaci:

*SAP*, *SEP*, *SIP*, *SOP*.

Niemało kłopotu logikom wszystkich czasów, aż do najnowszych, sprawiają zdania *I* i *O*. Istotnie trzeba to przyznać, wyrażenie „niektóre“, figurujące w tych zdaniach, jest bardzo nietrafne, bo w potocznej mowie ma znaczenie: „niektóre, ale nie wszystkie“. N. p. gdy powiemy: „Niektórzy ludzie są śmiertelni“, to człowiek nieobeznany z logiką pomyśli, iż twierdzimy, że nie wszyscy ludzie są śmiertelni. Wskutek tego, około wyrażenia „niektóre“ wytworzyła się taka mieszanina pojęć, że n. p. Biegański w powyższy

sposób, t. j. podobnie, jak w mowie potocznej, rozumie zdania szczegółowe w syllogistyce. Zobaczymy później, jak to się źle odbija na całym dalszym wykładzie. Dla schematu naukowego jest znacznie dogodniej te zdania inaczej rozumieć; w logice scholastycznej znaczenie zdań szczegółowych jest następujące: *SIP* oznacza „Istnieją *S*, które są *P*", *SOP* zaś oznacza: „Istnieją *S*, które nie są *P*". Wyrażenie „niektóre *S*" oznacza zatem „przynajmniej niektóre *S*"; mogą to więc być wszystkie *S*.

Można sobie postawić pytanie dlaczego Arystoteles przyjął za podstawowe te właśnie zdania, które teraz rozważamy? Aby to pytanie rozstrzygnąć, należy zwrócić uwagę na to. że chodzi tu o klasyfikację wzajemnych stosunków dwóch klas, dokładniej — o stosunki ich zakresów. Przeprowadzimy, na podstawie dysjunkcji podstawowej, klasyfikację wszystkich możliwych przypadków. Aby sobie uzmysłowić te stosunki, będziemy rysowali koła, lub inne obwody zamknięte. Kół takich prawdopodobnie używano już w starożytności, ale nic o tem nie wiadomo. O Eulerze dopiero wiadomo napewno, że się niemi posługiwał. Wielki ten matematyk napisał bowiem elementarny wykład logiki, w którym spotykamy tego rodzaju schematy. W rozmaitych książkach, zwłaszcza niemieckich, spotyka się często bardzo ostrą krytykę tej metody. Krytyka taka jest jednak, naszem zdaniem, zupełnie niesłuszna. Jest to bowiem bardzo dobry sposób wyjaśniania sobie stosunków, zachodzących między klasami. Oczywiście mogą one mieć znaczenie tylko jako schemat, obraz, nie zaś jako dowód, ale pod tym względem nikt nie może mieć wątpliwości.

Przystępujemy teraz do zapowiedzianej klasyfikacji. Niech terminy rozważanych klas będą, jak zwykle, *S* i *P*. Rozważamy najpierw elementy wspólne obu klasom: istnieją albo nie. Przypadek, w którym nie istnieją jest całkiem już określony; *S* i *P* wyłączają się wzajemnie. Oznaczamy ten przypadek literą $\varepsilon$. Aby zaś rozróżnić rozmaite możliwości, objęte tamtym przypadkiem, bierzemy pod uwagę elementy niewspólne obu klasom. Jeśli ich niema, to klasy są identyczne; przypadek ten oznaczamy przez literę $\alpha$. Jeżeli istnieją elementy niewspólne, to albo istnieją elementy wyróżniające *S*, t. j. należące do *S* a nie należące do *P* albo nie istnieją. Jeśli nie istnieją, to *S* jest częścią *P*; wypadek ten oznaczamy przez literę $\beta$. Jeżeli natomiast istnieją, to elementy wyróżniające *P* istnieją lub nie. Jeśli nie istnieją, to *P* jest częścią *S*; wypadek ten oznaczamy literą $\gamma$.

Jeśli istnieją, to mówimy, że klasy $S$ i $P$ się przecinają; wypadek ten oznaczamy literą $\delta$. Klasyfikację tę wyobraża schemat następujący:

Elementy wspólne:

Nie istnieją. — Istnieją.

$\varepsilon$ — Elementy niewspólne:

Nie istnieją. — Istnieją.

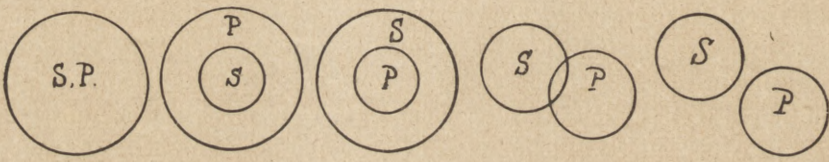
$\alpha$ — Elementy, wyróżniające $S$:

Nie istnieją. — Istnieją.

$\beta$ — Elementy, wyróżniające $P$:

Nie istnieją. — Istnieją.

$\gamma$ — $\delta$




α β γ δ ε

Fig. 1.

Ciąg powyższych przypadków będziemy nazywali ciągiem logicznym. Przypadki te uzmysławia nam fig. 1. Możemy je sobie jednak uprzytomnić bez kół Eulera. W rzeczy samej, oznaczmy przez: $K_1$ elementy wyróżniające $S$, $K_2$ — wyróżniające $P$, przez $K_3$ zaś — elementy wspólne obu klasom. Możemy powiedzieć, że:

W przypadku $\alpha$: $(S)$ składa się z $K_3$, a $(P)$ tak samo.
" " $\beta$: $(S)$ " " " $K_3$, a $(P)$ z $K_2$, $K_3$.
" " $\gamma$: $(S)$ " " " $K_1$, $K_3$, a $(P)$ z $K_3$.
" " $\delta$: $(S)$ " " " $K_1$, $K_3$, a $(P)$ z $K_2$, $K_3$.
" " $\varepsilon$: $(S)$ " " " $K_1$, a $(P)$ z $K_2$.

Mamy więc pięć zdań elementarnych, które pisać będziemy w postaci:

$$S\alpha P,\ S\beta P,\ S\gamma P,\ S\delta P,\ S\varepsilon P.$$

Oczywiście, nie należy mieszać znaczenia, które tutaj nadaliśmy literze $\varepsilon$ z jej znaczeniem w ideografji Peanowskiej!

Zdania orzekające logiki tradycyjnej są połączeniami zdań powyższych. Istotnie,

*SAP* znaczy: *SαP* lub *SβP*
*SEP* „ *SεP*
*SIP* „ *SαP* lub *SβP* lub *SγP* lub *SδP*
*SOP* „ *SγP* lub *SδP* lub *SεP*.

Można to przedstawić zapomocą następującego schematu:

$$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hphantom{\alpha\qquad\beta}}^{SAP}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{\gamma\qquad\delta\qquad\varepsilon}}^{SOP}} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hphantom{\alpha\qquad\beta\qquad\gamma\qquad\delta}}_{SIP}} & \underbrace{\hphantom{\varepsilon}}_{SEP} \end{array}$$

Schemat ten ujawnia odrazu, iż zdania szczegółowe są przeczeniami zdań ogólnych, mianowicie *SIP* jest przeczeniem *SEP*, *SOP* zaś jest przeczeniem *SAP*.

Zdania podstawowe mogłyby być oczywiście inaczej dobrane. Niektórzy logicy zarzucają Arystotelesowi, iż jego wybór jest dowolny, nienaturalny, a nawet nielogiczny. Tego rodzaju zarzuty są jednak niesłuszne. Podstawowe zdania Arystotelesa są bardzo przydatne. Użyteczność ich zresztą zależy od tego, jak je interpretować. Jeżeli bowiem będziemy — jak to czyni Biegański — interpretować n. p. zdanie *SIP* jako: „Tylko niektóre *S* są *P*“, to zdanie to nie obejmie wypadku *SαP*, wskutek czego nie jest przeczeniem zdanie *SEP*, co powoduje bardzo wiele niedogodności. Z zdaniami orzekającemi logiki tradycyjnej spotykamy się bardzo często. Najważniejszem z nich jest zdanie *SAP*; większość twierdzeń w nauce ma tę postać. Zasługuje na uwagę także zdanie *SEP*. Zdania *SIP* i *SOP* możnaby nazwać zdaniami o istnieniu. Tego rodzaju zdania również bardzo są rozpowszechnione w nauce; cała klasa twierdzeń matematycznych — t. zw. twierdzenia o istnieniu — wyraża się właśnie w ten sposób. Dodajmy jeszcze, iż każdy z stosunków, jakie wyodrębniliśmy w ciągu logicznym, może być wyrażonym zapomocą kombinacji zdań

*A*, *E*, *I*, *O*.

Dla przykładu weźmy zdanie

*SβP*.

Twierdzimy, iż jest ono równoważne układowi zdań:

*SAP* i *POS*.

Istotnie, *SAP* oznacza *SαP* lub *SβP*, *SOP* zaś oznacza *PγS* lub *PδS*

lub $P\varepsilon S$. Ale $P\gamma S$ jest równoważne $S\beta P$, $P\delta S$ równoważne $S\delta P$, a $P\varepsilon S$ równoważne $S\varepsilon P$. $POS$ jest więc równoważne $S\beta P$ lub $S\delta P$ lub $S\varepsilon P$. Jedynym więc stosunkiem między $S$ i $P$, spełniającym zarówno zdanie $SAP$, jak $POS$ jest rzeczywiście stosunek $S\beta P$.

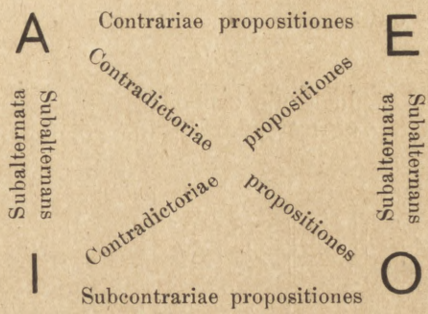
Zanim się dalej posuniemy, pragniemy wprowadzić jeszcze jedno pojęcie, bardzo ważne dla całej syllogistyki, pojęcie zakresu podmiotu i orzeczenia. W tym celu wyrazimy nieco inaczej, niż to przedtem uczyniliśmy, zdania orzekające Arystotelesa, mianowicie:

*SAP* — Każde *S* jest pewnem *P*.
*SEP* — Zadne *S* nie jest żadnem *P*.
*SIP* — Niektóre *S* są pewnemi *P*.
*SOP* — Niektóre *S* nie są żadnemi *P*.

Widzimy tedy, iż, w zdaniach ogólnych, podmiot zaopatrzony jest w określenie „każde“ lub „żadne“, natomiast w zdaniach szczegółowych — zaopatrzony jest w określenie „niektóre“. Z tego względu mówimy, iż podmiot, w zdaniach ogólnych jest wzięty ogólnie t. j. ma zakres ogólny, w zdaniach zaś szczegółowych jest wzięty szczegółowo, t. j. ma zakres szczegółowy. Podobnie orzeczenie w zdaniach twierdzących, ma zakres szczegółowy, a w zdaniach przeczących — ogólny. Oznaczając przez znak + zakres ogólny, a przez znak — zakres szczegółowy, streścić to możemy w następującej tabelce:

| | *A* | *E* | *I* | *O* |
|---|---|---|---|---|
| *S* | + | + | — | — |
| *P* | — | + | — | + |

Już Arystoteles i scholastycy zajmowali się związkami pomiędzy czterema podstawowemi zdaniami. Związki te przedstawia następująca, wymyślona przez scholastyków, tablica, zwana kwadratem logicznym:




Zdania: *A* i *O* oraz *I* i *E* są więc sprzeczne, *A* i *E* przeciwne, *I* i *O* zaś — podprzeciwne; nadto zdania *I* i *O* są podporządkowane odpowiednio zdaniom *A* i *E*.

1. Sprzeczność. Widzieliśmy już, że *A* i *O* z jednej strony, zaś *E* i *I* z drugiej, wyczerpują razem wszystkie przypadki ciągu logicznego i wykluczają się nawzajem. Stąd zdania sprzeczne nie mogą być ani razem prawdziwe ani razem fałszywe, t. j. jeżeli jedno z nich jest prawdziwe, to drugie jest fałszywe i naodwrót. Związki te ideograficznie można wyrazić, jak następuje:

$$\begin{cases} A \supset \sim O \text{ t. j. } O \supset \sim A \text{ i } \sim A \supset O \text{ t. j. } \sim O \supset A \\ E \supset \sim I \text{ t. j. } I \supset \sim E \text{ i } \sim E \supset I \text{ t. j. } \sim I \supset E. \end{cases}$$

2. Przeciwieństwo. Zdania *A* i *E* nie obejmują w ciągu logicznym, żadnego wspólnego przypadku, nie mogą więc być razem prawdziwe, czyli wyłączają się wzajemnie; mamy zatem:

$$A \supset \sim E \text{ czyli } E \supset \sim A.$$

Natomiast nie obejmują te zdania razem wszystkich przypadków ciągu logicznego; mogą więc być razem fałszywe.

3. Podprzeciwieństwo. Odwrotnie zdania *I* i *O*. Nie wyłączają się one wzajemnie, gdyż obejmują niektóre wspólne przypadki. Natomiast razem obejmują one wszystkie możliwe przypadki; nie mogą więc być razem fałszywe; mamy zatem:

$$\sim I \supset O, \ \sim O \supset I$$

4. Podporządkowanie. Zestawiając *A* z *I*, widzimy, iż w ciągu logicznym, wypadki, odpowiadające *A*, zawarte są wśród wypadków, odpowiadających *I*; mamy więc:

$$A \supset I$$

Odwrotny stosunek jednak nie zachodzi.

Podobnie mamy:

$$E \supset O;$$

odwrotny stosunek jednak nie zachodzi.

Powyższe wyniki streszcza w sobie tabelka następująca, ułożona przez Jevons'a.

| + | — | *A* | *E* | *I* | *O* |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | *O* | + | — | + | — |
| *E* | *I* | — | + | — | + |
| *I* | *E* | | — | + | |
| *O* | *A* | — | | | + |

Znak + wyraża tutaj prawdę a — fałsz. Pierwsza kolumna zawiera zdania, z których prawdziwości wyciągamy wnioski, druga kolumna zdania, z których fałszywości wyciągamy wnioski (dlatego u góry jest + i —). Wnioski znajdują się w tym samym wierszu, co zdanie, z którego prawdziwości lub fałszywości wnioskujemy, a dotyczą zdań, które są podane w tej samej kolumnie u góry. Tak więc pierwszy wiersz czytamy: Z tego, iż prawdą jest *A*, czyli fałszem jest *O*, wnioskujemy, iż *A* jest prawdą, *E* jest fałszem, *I* jest prawdą, *O* jest fałszem.

Widzimy, że z potwierdzenia zdań ogólnych lub zaprzeczenia szczegółowych mamy wnioski dotyczące trzech, a więc wszystkich, pozostałych zdań; natomiast z zaprzeczenia zdań ogólnych lub potwierdzenia szczegółowych mamy wnioski tylko o jednem ze zdań pozostałych. Każdy wniosek, w taki sposób wyciągnięty, ma swą nazwę łacińską; może więc wnioskowanie być „ad contrariam", „ad contradictoriam", „ad subcontrariam" lub „ad subalternatam".

Aby lepiej wniknąć w te związki, konieczne są liczne przykłady, które każdy powinien sam stosować. Należy więc wziąć jakiekolwiek zdanie rozważanej tutaj postaci, niekoniecznie prawdziwe, n. p. „Każdy trójkąt jest kołem" i wyciągać z niego wszystkie możliwe wnioski lub też próbować je wyrażać zapomocą oceny

logicznej innych zdań o trójkącie i kole. Wogóle zaznaczyć należy, iż poznanie jakiejkolwiek gałęzi wiedzy jest niemożliwem bez ćwiczeń; jeżeli jednak chodzi o ćwiczenia z zakresu logiki, to już Grassmann zauważył wielką ich pożyteczność. One wzmacniają umysł wskutek ciągłej uwagi, jakiej wymagają. Z tego powodu jest to gimnastyka myśli, która niczem innem zastąpić się nie da.

Tyle o kwadracie logicznym. Widzieliśmy, w jaki sposób pozwala on wnioskować z danej przesłanki. Są jednak i inne sposoby wnioskowania z jednej przesłanki. Do takich należy odwrócenie (po łacinie: conversio). Zanim przystąpimy do odwracania zdań podstawowych Arystotelesa, zbadajmy warunki odwracalności zdań elementarnych. Otóż z definicji stosunków, rozpoznanych przy tworzeniu ciągu logicznego, mamy związki

$$\begin{cases} S\alpha P \supset P\alpha S \\ S\beta P \supset P\gamma S \\ S\gamma P \supset P\beta S \\ S\delta P \supset P\delta S \\ S\varepsilon P \supset P\varepsilon S \end{cases}$$

Ponieważ zaś zdanie

$$SEP$$

jest tem samem, co $S\varepsilon P$, przeto

$$SEP \supset PES.$$

Zdanie zaś

$$SIP$$

oznacza $S\alpha P$ lub $S\beta P$ lub $S\gamma P$ lub $S\delta P$ czyli $P\alpha S$ lub $P\gamma S$ lub $P\beta S$ lub $P\delta S$; ale to jest $PIS$. Zatem

$$SIP \supset PIS.$$

Zdania więc $SEP$ i $SIP$ odwracają się bez ograniczeń; takie odwrócenie nazywa się po łacinie conversio simplex.

$$SAP$$

w ten sposób odwrócić się nie da. Istotnie znaczy ono to samo, co $S\alpha P$ lub $S\beta P$ czyli $P\alpha S$ lub $P\gamma S$, z tego zaś $PAS$ nie wynika. Natomiast z $SAP$ wynika, na zasadzie związków kwadratu logicznego, $SIP$, które to zdanie jest odwracalnem bez ograniczeń. Zatem

$$SAP \supset PIS.$$

Zdanie $SAP$ jest więc odwracalnem z ograniczeniem zakresu. Od-

wrócenie takie zwie się conversio per accidens. Pozostaje jeszcze zdanie *O*. Ono jednak nie daje się wcale odwracać. Istotnie, *SOP* znaczy $S\gamma P$ lub $S\delta P$ lub $S\varepsilon P$ czyli $P\beta S$ lub $P\delta S$ lub $P\varepsilon S$. Z tego zaś nie wynika żadne ze zdań

*PAS*, *PES*, *PIS*, *POS*,

istotnie, jeśli zachodzi $P\varepsilon S$, to fałszem jest *PAS* i *PIS*, jeśli zaś zachodzi $P\beta S$, to fałszem jest *PES* i *POS*.

W ten sposób rozstrzygnęliśmy kwestję odwracania zdań podstawowych. Zastanowić się teraz musimy jeszcze nad ostatnim sposobem wyciągania wniosków z jednej przesłanki, jaki zna logika tradycyjna, i który, po łacinie zwie się obversio. Po polsku, będziemy to przekształcenie nazywali obróceniem; nie jest to dobra nazwa, ale przyjmujemy ją w braku lepszej. Obrócenie polega na zastępowaniu orzeczenia przez jego przeczenie i równoczesnej zmianie jakości zdania. W myśl bowiem tego, cośmy już przedtem mówili o przeczeniu klasy, jeśli coś jest *P*, to nie jest — *P*, a jeśli coś nie jest *P*, to jest — *P* i naodwrót, jeśli coś jest — *P*, to nie jest *P*, a jeśli coś nie jest — *P*, to jest *P*. Zatem

| | | | |
|---|---|---|---|
| *SAP* | jest | równoważnem | *SE — P* |
| *SEP* | „ | „ | *SA — P* |
| *SIP* | „ | „ | *SO — P* |
| *SOP* | „ | „ | *SI — P* |

To jest właśnie obrócenie czyli ekwipolencja. Obracanie i odwracanie zdań obejmujemy wspólną nazwą kontrapozycji. Zastosowania kontrapozycji są bardzo liczne; tutaj podamy tylko dwa najważniejsze zastosowania: Tak więc, stosując obwersję, zamieniamy *SAP* w *SE — P*, to zaś odwróciwszy, dostajemy — *PES*, co po ponownem zastosowaniu obrócenia, zamienia się w — *PE — S*. Z *SAP* wynika zatem — *PA — S* i naodwrót, uzmysłowi to fig. 1 $\beta$. Wnętrze koła *S* przedstawia klasę *S*, zaś reszta płaszczyzny — klasę — *S*; wnętrze koła *P* przedstawia klasę *P*, zaś reszta płaszczyzny — klasę — *P*. Jasnem jest, że, skoro koło *S* pokryte jest przez *P*, — *S* pokrywa — *P*. Zupełnie podobnie przekształcając *SOP*, przekonamy się, iż z *SOP* wynika — *SO — P* i naodwrót.

Jak już wskazaliśmy, są to rzeczy, które trzeba ćwiczyć. Podajemy więc parę przykładów ćwiczeń z tego zakresu.

1. Spróbujemy n. p. zbadać, czy przeczenie każdego zdania

da się przedstawić w postaci zdania tejże jakości? Zdanie $\sim(SAP)$ możemy, na podstawie związków kwadratu logicznego, przedstawić w postaci $SOP$, czyli, po zastosowaniu obrócenia, $SI-P$. W ten sposób dopięliśmy celu. Zupełnie podobnie możnaby postąpić z zaprzeczeniem zdań $E$, $I$, $O$.

2. Wszystkie zdania podstawowe mogą być wyrażone zapomocą któregokolwiek z nich, n. p. $A$. W rzeczy samej, $SEP$ jest równoważnem $SA-P$, $SIP$ jest równoważnem $\sim(SEP)$, to zaś jest równoważnem $\sim(SA-P)$. Wreszcie $SOP$ jest tem samem, co $\sim(SAP)$. Podobnie dla $E$, $I$, $O$.

3. Możemy wogóle wykonywać rozmaite przekształcenia na zdaniach. Tak więc, wziąwszy zdanie $-SAP$, możemy je przedstawiać w postaci $-SE-P$, $-PE-S$, $-PAS$ lub innych.

4. Możemy wreszcie postawić sobie żądanie wyciągnięcia wszystkich wniosków z danego zdania, n. p. $SAP$, lub jakiegokolwiek innego.

Kiedy zwracamy się do konkretnych przykładów, pamiętać należy, iż klasy $S$ i $P$ mają być niepuste; tak samo nie mogą one obejmować całego świata mowy, gdyż wówczas ich przeczenia byłyby puste.

W rzeczach tych nadzwyczaj łatwo się mylić. Tak n. p. nasz filozof Trentowski, bardzo zasłużony — chociażby tylko tem, że jemu zawdzięczamy bardzo dobry wyraz: przesłanka — myślał, że znalazł nowe prawo logiczne, podług którego ze zdania $SIP$ wynika $PAS$ i napisał dosłownie: „Niektóre zwierzęta są lwami, ergo każdy lew jest zwierzęciem“(!). Podług tego „prawa“ możnaby rozumować tak: „Niektórzy Polacy są uczonymi, ergo każdy uczony jest Polakiem!“ Nie przytaczamy tego bynajmniej na naganę Trentowskiego; chodziło nam tylko o pokazanie łatwości błędów. Zresztą nietylko Trentowski popełniał tego rodzaju omyłki, w książce znakomitego filozofa niemieckiego, Mach'a, znajduje się gruby błąd, dotyczący związków kwadratu logicznego!

Zazwyczaj wnioskowanie z kwadratu logicznego i kontrapozycję obejmuje się wspólną nazwą wnioskowania bezpośredniego. Nasuwa się pytanie, czy w ten sposób wyczerpaliśmy cały zasób wniosków, jakie można wyciągnąć z jednej przesłanki? Jeżeli określimy dokładnie postać tego wniosku, żądając n. p. wniosku postaci

$$PH'S$$

z przesłanki postaci

$$SHP$$

(gdzie *H* i *H'* oznaczają którekolwiek ze stosunków: *A*, *E*. *I*, *O*), to odpowiedź wypadnie twierdząco. Szukając natomiast odpowiedzi na powyższe pytanie w całej ogólności, warto pamiętać, że de Morgan, jak podaje Jevons, zwykł był mawiać na swych· wykładach, że cała logika Arystotelesowska nie wystarcza, aby, wychodząc z założenia, iż koń jest zwierzęciem, udowodnić, iż głowa konia jest głową zwierzęcia!

---

ROZDZIAŁ VI.

# Logika Arystotelesa: wnioskowanie z dwóch przesłanek.

Zagadnienie, do którego rozwiązania przystępujemy, jest takie: Na podstawie dwóch danych przesłanek, należących do jednego z typów: *A*, *E*, *I*, *O*, zawierających jeden termin wspólny *M* i dwa terminy niewspólne, *S* i *P*, powiedzieć, czy z tych przesłanek wynika jaki wniosek postaci

*SAP*, *SEP*, *SIP* lub *SOP*,

a jeżeli tak, to podać najogólniejszy wniosek.

Niejasne formułowanie powyższego zagadnienia wywołuje nieporozumienia, które się często spotyka, czytając literaturę przedmiotu. Jeżeli bowiem, zamiast wniosku jednej z powyższych postaci, mówić będziemy o wniosku jakimkolwiek, to zadanie stanie się nieokreślonem. Naprzykład, jak zobaczymy później, przesłanki *MAP* i *SEM* nie dają żadnego wniosku postaci *SHP*, gdzie *H* zastępuje *A*, *E*, *I* lub *O*. Zobaczymy jednakże, iż z tych przesłanek wynika wniosek *POS*, który, do pewnego stopnia, charakteryzuje *S*. Otrzymany wniosek możnaby także przedstawiać w rozmaitych postaciach. Ale to wszystko nie stanowi odpowiedzi na zagadnienie syllogistyki.

Przystępując do samego przedmiotu, wprowadzić musimy pewne nazwy. Nazywamy więc podmiot wniosku, oznaczany zazwyczaj, jak wyżej, przez *S*, terminem mniejszym, orzeczenie wniosku *P*, terminem większym, termin zaś wspólny obu przesłankom — terminem średnim. Nazwy te pochodzą stąd, że w najprostszym przypadku syllogimu, który uzmysławia figura 2., termin mniejszy zawiera się w średnim, ten zaś w większym. Przesłanka, zawierająca termin mniejszy, zwie się przesłanką mniejszą, przesłanka zaś zawierająca termin większy, zwie się przesłanką większą. Zazwyczaj

w schemacie syllogizmu pisze się przesłankę większą nad przesłanką mniejszą, pod niemi zaś wniosek.

Schemat syllogizmu rozmaicie wygląda, zależnie od położenia terminu średniego w przesłankach; w każdej z nich bowiem może on być podmiotem lub orzeczeniem. Na tej podstawie dzielimy

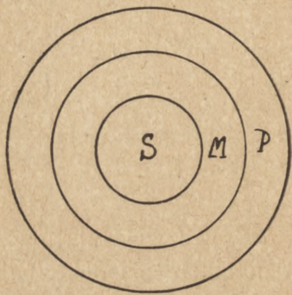



Fig. 2.

wszystkie możliwe przypadki na cztery kategorje, t. zw. figury syllogizmu. Pierwszą figurę charakteryzuje to, iż termin średni jest podmiotem większej a orzeczeniem mniejszej przesłanki. Schemat jest więc następujący:

$$\frac{\begin{array}{c} M - P \\ S - M \end{array}}{S - P}$$

W figurze drugiej, termin średni jest orzeczeniem w obu przesłankach. Schemat jest więc następujący:

$$\frac{\begin{array}{c} P - M \\ S - M \end{array}}{S - P}$$

W figurze trzeciej, przeciwnie, termin średni jest podmiotem w obu przesłankach. Schemat jest więc następujący:

$$\frac{\begin{array}{c} M - P \\ M - S \end{array}}{S - P}$$

W figurze czwartej wreszcie, termin średni jest orzeczeniem większej, a podmiotem mniejszej przesłanki. Schemat jest więc następujący:

$$\frac{\begin{array}{c} P - M \\ M - S \end{array}}{S - P}$$

Tę ostatnią figurę wprowadzili dopiero scholastycy; Arystoteles odnosił jej tryby do figury pierwszej. W traktatach logiki, zwłaszcza niemieckich, czytamy rozmaite zarzuty, skierowane przeciwko figurze czwartej. Naszem zdaniem są one zupełnie niesłuszne, gdyż figura ta jest równie potrzebną, jak inne i daje równie ważne wnioski.

Każdą kombinację dwóch przesłanek nazywamy trybem (modus). Wszystkie możliwe tryby są:

*AA EA IA OA*
*AE EE IE OE*
*AI EI II OI*
*AO EO IO OO*

Każdy z tych szesnastu trybów może należeć do każdej z czterech figur. Razem więc stanowi to

$$16 \times 4 = 64$$

tryby. Z nich jednak tylko dziewiętnaście daje wnioski; mówimy o nich, że są ważne. Z nich po cztery należą do pierwszych dwóch figur, sześć należy do trzeciej a pięć do czwartej. Trybom tym nadano w logice scholastycznej imiona sztuczne, nic nie znaczące w języku łacińskim, ale mającę ukryte znaczenie, które niżej objaśnimy. Imiona trybów figury I są:

Barbara,
Celarent,
Darii,
Ferio;

figury II:

Cesare,
Camestres.
Festino,
Baroco;

figury III:

Darapti,
Felapton,
Disamis,
Datisi,
Bocardo,
Ferison;

figury IV:

Bamalip,
Calemes,

Dimatis,
Fesapo,
Fresison.

W skład każdego z nich wchodzą dokładnie trzy samogłoski, mianowicie pewna kombinacja znanych nam ze swego w syllogistyce znaczenia liter: A, *E*, *I*, *O*, pierwsza z nich charakteryzuje przesłankę większą, druga — mniejszą, trzecia zaś — wniosek. Tak więc nazwa: Camestres oznacza, iż tryb *AE* w figurze II daje wniosek *E*, t. j. że z przesłanek *PAM* i *MES* wynika wniosek *SEP*. Ale imiona te zawierają jeszcze coś więcej, mianowicie wskazówki do uzasadnienia odnośnych wniosków przez sprowadzenie ich do wniosków z trybów figury I. Zauważyć należy przedewszystkiem, że imiona trybów pierwszej figury zaczynają się od czterech pierwszych spółgłosek alfabetu łacińskiego. W innych figurach imiona trybów zaczynają się od tych samych liter; otóż każdy tryb figury II, III lub IV sprowadza się do tego trybu figury pierwszej, którego imię zaczyna się od tej samej litery, co jego imię. Tak n. p. Disamis sprowadza się do Darii a Bocardo — do Barbara. W dalszym ciągu tych imion występuje dziesięć spółgłosek, które ułożyć można w tabelę następującą:

*b*, *c*, *d*,
*l*, *m*, *n*,
*p*,
*r*, *s*, *t*.

Tylko te litery, które się znajdują w środkowej kolumnie, są znaczące; pozostałe służą jedynie do ułatwiania wymowy. Ze środkowych liter: litera *c* ostrzega, że dowód trzeba przeprowadzić przez reductio ad absurdum, czyli na podstawie prawa sprzeczności, „per contradictionem"; litera *m* oznacza przestawienie przesłanek „metatesis praemissarum"; litera *p* mówi, iż to zdanie, które symbolizuje samogłoska, przed nią stojąca, ma ulec odwróceniu z ograniczeniem zakresu („conversio per accidens"); wreszcie litera *s* wyraża odwrócenie bez ograniczeń („conversio simplex") zdania, które symbolizuje samogłoska, przed nią się znajdująca.

Pokażemy na przykładach, w jaki sposób korzysta się z tych wskazówek. Zwróćmy się więc najpierw do trybu Camestres figury II. Jego schemat jest następujący:

*PAM*
*SEM*
―――
*SEP*

Litera *m* w imieniu wskazuje, że dla dowodu, trzeba przestawić przesłanki, uczyniwszy to, otrzymujemy:

*SEM*
*PAM.*

Ale w imieniu Camestres, po pierwszem *E*, mamy literę *s*, odwracamy więc przesłankę przeczącą i otrzymujemy:

*MES*
*PAM.*

Jest to tryb Celarent figury pierwszej; mamy wniosek:

*PES.*

Ale litera *s* na końcu imienia Camestres, przpomina, iż trzeba wniosek odwrócić; uczyniwszy to, dostajemy

*SEP*

co było do okazania.

Weźmy teraz inny tryb, n. p. tryb Darapti figury III. Imię wskazuje, iż jest to tryb taki:

*MAP*
*MAS*
―――
*SIP.*

Imię Darapti zawiera dwie spółgłoski znaczące: *D* na początku i *p* w środku. Tryb sprowadzi się zatem do trybu Darii figury pierwszej przez odwrócenie z ograniczeniem zakresu przesłanki mniejszej, (gdyż *p* znajduje się po drugiej samogłosce). Istotnie, jeśli odwrócimy przesłankę mniejszą, to otrzymamy układ przesłanek

*MAP*
*SIM*;

jest to tryb Darii z wnioskiem

*SIP*,

o który właśnie chodziło.

Weźmy jeszcze jeden z trybów figury IV, n. p. Calemes. Imię wskazuje, że jest to tryb taki:

*PAM*
*MES*
―――
*SEP.*

Z liter, wchodzących w skład imienia Calemes, trzy mają znaczenie: *C*, *m* i *s*. Litera *m* mówi o potrzebie zmiany porządku przesłanek, litera *C* zwraca uwagę na tryb Celarent figury pierwszej, a końcowe *s* wskazuje, iż otrzymany wniosek trzeba odwrócić. Wykonując to, otrzymujemy istotnie z przesłanek

*MES*
*PAM*

wniosek

*PES*,

a po odwróceniu jego —

*SEP*,

o co właśnie chodziło.

W nieco inny sposób uzasadnia się dwa wyjątkowe tryby, których imiona zawierają literę *c*. Dowody musi się prowadzić przez reductio ad absurdum. Oto, jak to wygląda: Przesłanki trybu Baroco figury II są:

*PAM*
*SOM*;

chcemy uzasadnić wniosek:

*SOP*.

Zakładamy więc chwilowo, iż jest fałszywy. Ze związków kwadratu logicznego mamy tedy

*SAP*.

Zestawmy to z przesłanką

*PAM*.

Terminem średnim jest *P*. Jeżeli przesłanki te ustawimy jak następuje:

*PAM*
*SAP*,

to zobaczymy, iż mamy tryb Barbara figury I; wniosek jest więc

*SAM*,

a więc zaprzeczenie przesłanki większej. Zakładając fałszywość wniosku

*SOP*,

dochodzimy zatem do sprzeczności; musi więc być prawdą

*SOP*,

co było do okazania.

W imieniu „Baroco“ jest jeszcze ta wskazówka mnemotechniczna, że litera *c* znajduje się po drugiej samogłosce, co oznacza, iż z przeczenia wniosku mamy dojść do zaprzeczenia przesłanki mniejszej, opierając się oczywiście na większej. Odwrotnie tryb Bocardo figury III. Litera *B* na początku wskazuje wprawdzię, iż stosuje się także tryb Barbara. ale położenie litery *c* wskazuje na to, że z przeczenia wniosku mamy dojść do przeczenia przesłanki większej. Spróbujmy to wykonać. Tryb nasz należy do figury III, samogłoski wskazują więc, że jego postać jest:

$$\frac{\begin{matrix} MOP \\ MAS \end{matrix}}{SOP}$$

Załóżmy więc, że fałszem jest *SOP*, czyli, że prawdą jest *SAP*. Dołączamy do tego przesłankę większą, *MAS*. Mamy więc:

$$\begin{matrix} SAP \\ MAS, \end{matrix}$$

a więc tryb Barbara z wnioskiem

$$MAP,$$

który przeczy przesłance większej,

$$MOP.$$

Na dokładniejszą analizę dowodów będziemy się mogli zdobyć dopiero później. Narazie jednak podamy powyższe dowody w nieco dokładniejszej postaci, mianowicie w postaci podobnej do tej, do której doszliśmy w pierwszym rozdziale, t. j. bez uwzględnienia przesłanek z teorji zdań.

Zwracamy się najpierw znowuż do trybu Camestres. Przedewszystkiem musimy ustanowić spis przesłanek, na których dowód się oprze. O doborze ich pouczają nas niektóre litery wchodzące w skład imienia Camestres. Tak więc początkowa litera *c* wskazuje, iż będziemy się musieli oprzeć na syllogiźmie trybu Celarent. Zapomocą Peanowskiego znaku wynikania, zapiszemy go w postaci następującej:

1. $MEP . SAM . \supset . SEP$:

Dwukrotnie powtarzające się *s* po samogłosce *e*, przypomina, iż będziemy musieli odwracać zdania ogólno-przeczące; zapisujemy więc przesłankę:

2. $SEP \supset PES$.

Oprzeć się wreszcie musimy na obu przesłankach trybu Camestres,

3. $PAM$
4. $SEM$

aby uzadnić wniosek:

$$SEP$$

Wówczas tabela dowodu, sporządzona, jak w rozdziale I, przedstawia się, jak następuje:

| | |
|---|---|
| 4. $\mid\!\rightarrow SEM$ | (1) |
| (1). 2. $[P \mid M] \mid\!\rightarrow MES$ | (2) |
| 3. $\mid\!\rightarrow PAM$ | (3) |
| (2). (3). 1. $[S, P \mid P, S] \mid\!\rightarrow PES$ | (4) |
| (4). 2. $[S, P \mid P, S] \mid\!\rightarrow SEP$ c. b. d. o. | |

Podobnie przedstawiają się inne dowody. Ktoby jednak chciał uzasadnić wnioski z trybów Baroco lub Bocardo, ten mógłby natrafić na pewne trudności. Dlatego też, aby wskazać, jak to można zrobić, podamy dowód pierwszego z nich; dowód drugiego jest zupełnie analogiczny. Chcemy więc pokazać, że z przesłanek

$$PAM$$
$$SOM$$

wynika wniosek

$$SOP.$$

Do przesłanek należeć będzie tryb Barbara; my go jednak weźmiemy w osobliwej postaci, zamiast bowiem

$$MAP \,.\, SAM \,.\supset .\, SAP$$

napiszemy:

1. $$MAP \,.\, \sim(SAP) \,.\supset .\, \sim(SAM).$$

Teorja zdań poucza, iż są to rzeczy równoważne. Intuicyjnie jest to także jasnem. Jeżeli bowiem wniosek jest fałszywy, to nie mogą obie przesłanki być prawdziwe; jeżeli jednak prawdziwą jest przesłanka większa, to fałszywą musi być druga, a więc przesłanka mniejsza.

Dalsze dwie przesłanki będą zaczerpnięte ze związków kwadratu logicznego. Będą to twierdzenia następujące:

2. $$\sim(SAP) \,.\supset .\, SOP$$
3. $$SOP \,.\supset .\, \sim(SAP).$$

Wreszcie przyjąć musimy obie przesłanki trybu Baroco, a więc:

4. $PAM$
5. $SOM$

Sam dowód przedstawia się, jak następuje:

4. $\vdash\!\rightarrow PAM$ (1)
5. $\vdash\!\rightarrow SOM$ (2)
(2). 3. $[P \mid M] \vdash\!\rightarrow \sim (SAM)$ (3)
(1). (3) . 1. $[M, P \mid P, M] \vdash\!\rightarrow \sim (SAP)$ (4)
(4). 2. $\vdash\!\rightarrow SOP$ c. b. d. o.

Zauważyć należy, iż uniknęliśmy tutaj redukcji ad absurdum; stało się to dzięki napisaniu trybu Barbara w tej osobliwej postaci. Narazie na to tylko wskazujemy; później to dokładniej wyjaśnimy.

W każdym razie sprowadziliśmy wszystkie figury do figury pierwszej. Jak teraz uzasadnić wnioski w tej figurze? Sprowadzimy przedewszystkiem Darii i Ferio do Barbara i Celarent. Istotnie, przesłanki trybu Darii są:

$$MAP$$
$$SIM$$

Druga przesłanka mówi zatem, że „niektóre $S$ są $M$"; jeżeli jednak oznaczymy przez $S'$ te $S$, które są $M$, to z definicji będzie:

$$S'AM.$$

Ale przesłanki:

$$MAP$$
$$S'AM$$

tryb Barbara) dają wniosek:

$$S'AP$$

a więc „niektóre $S$ są $P$", c. b. d. o.

W zupełnie podobny sposób sprowadza się Ferio do Celarent.

Zauważyć jednak należy, iż w tych dowodach posługujemy się środkami, których w poprzednich dowodach nie używaliśmy; występuje tutaj tworzenie owej klasy $S'$. Dokładniejsza analiza logiczna tych rozumowań mogłaby nastręczyć pewne trudności. Dlatego też, obok tych dwóch dowodów podamy dowody, polegające na sprowadzeniu trybów Darii i Ferio do trybu Celarent, korzystając jedynie z odwracania zdań orzekających, ze związków kwadratu logicznego i z redukcji ad absurdum.

Oto uzasadnienie syllogizmu podług trybu Darii: Schemat jego jest następujący:

$$\frac{\begin{array}{c} MAP \\ SIM \end{array}}{SIP.}$$

Załóżmy chwilowo:

$$\sim (SIP)$$

Mamy tedy, ze związków kwadratu logicznego:

$$SEP$$

czyli

$$PES$$

(conversio simplex); dołączając do tego przesłankę

$$MAP$$

otrzymujemy tryb Celarent z wnioskiem

$$MES$$

czyli

$$SEM,$$

który przeczy przesłance

$$SIM$$

Nie może zatem być

$$\sim (SIP)$$

a więc musi być

$$SIP$$

c. b. d. o.

Podobnie wygląda uzasadnienie wniosku trybu Ferio. Schemat jego jest:

$$\frac{\begin{array}{c} MEP \\ SIM \end{array}}{SOP}$$

Odwróćmy przesłankę większą. Mamy tedy

$$PEM;$$

Zaprzeczmy wnioskowi. Mamy

$$SAP.$$

Poznajemy przesłanki trybu Celarent z wnioskiem:

$$SEM,$$

który przeczy przesłance mniejszej, skąd wynika, c. b. d. o.

Pozostają już tylko tryby Barbara i Celarent. Ale drugi z nich sprowadzi się łatwo do pierwszego. W rzeczy samej, przesłanki trybu Celarent są:

$$MEP$$
$$SAM$$

Ale, obwersję stosując, możemy zastąpić pierwszą z tych przesłanek przez

$$MA - P.$$

Otrzymujemy tedy tryb Barbara z wnioskiem

$$SA - P,$$

czyli

$$SEP, \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Zwracamy się teraz do uzasadnienia trybu Barbara. Ponieważ tutaj żadnego trybu syllogistycznego zastosować nie możemy, musimy przesłanki i wniosek sprowadzić do postaci zdania warunkowego. Tryb Barbara przybierze tedy postać następującą:

$$\begin{array}{c} x \varepsilon M . \supset . x \varepsilon P \\ x \varepsilon S . \supset . x \varepsilon M \\ \hline x \varepsilon S . \supset . x \varepsilon P. \end{array}$$

W dowodzie przyjmujemy za przesłanki obie przesłanki trybu, a więc:

1. $x \varepsilon M . \supset . x \varepsilon P$
2. $x \varepsilon S . \supset . x \varepsilon M$

oraz poprzednik wniosku, t. j.

3. $x \varepsilon S$

a na tej podstawie udowadniamy następnik wniosku

$$x \varepsilon P$$

Sam dowód, nadzwyczaj prosty, przedstawia się jak następuje:

$$3. \mid\!\rightarrow x \varepsilon S \qquad (1)$$
$$(1).\ 2. \mid\!\rightarrow x \varepsilon M \qquad (2)$$
$$(2).\ 1. \mid\!\rightarrow x \varepsilon P, \qquad \text{c. b. d. o.}$$

W ten sposób uzasadniliśmy wnioski wszystkich trybów ważnych. Pozostaje do wykazania, iż pozostałe tryby żadnych wnio-

sków nie dają; jest to obalenie trybów nieważnych, którem zajmiemy się w następnym rozdziale.

Tymczasem na zakończenie niniejszego rozdziału, dodamy, iż dawniej nieco inaczej uzasadniano syllogizmy figury pierwszej. Przyjmowano bowiem tryby Barbara i Celarent w postaci t. zw. dictum de omni et de nullo:

„Quidquid de omni valet, de quibusdam et de singulis valet“ (Barbara)

„Quidquid de nullo valet, neque de quibusdam valet neque de singulis“ (Celarent).

Po polsku:

„To, co się sprawdza dla wszystkich, sprawdza się dla niektórych i dla pojedyńczych osobników“.

„To, co się nie sprawdza dla żadnych, nie sprawdza się ani dla niektórych ani dla pojedyńczych osobników“.

Jeszcze dzisiaj zresztą w niejednym traktacie logiki można znaleźć podobne wywody. Jest rzeczą godną uwagi, iż tutaj wyodrębniano wypadek, gdy chodziło o klasy złożone z jednego osobnika. Już bowiem wówczas przeczuwano wspomniane przez nas trudności, które nastręcza rozważanie takich klas.

ROZDZIAŁ VII.

# Logika Arystotelesa: obalenie trybów nieważnych.

Zwracając się do obalenia trybów nieważnych, zaznaczamy odrazu, iż możnaby to uskutecznić dla każdego takiego trybu zosobna przez podanie odpowiednich przykładów; byłaby to jednak robota bardzo żmudna i bardzo mało pouczająca. Użyjemy więc innego sposobu. Można bowiem uzasadnić pewne prawidła ogólne, odnoszące się do syllogizmu, z których wynikają twierdzenia, dotyczące poszczególnych figur, które właśnie pozwalają wykreślić wszystkie tryby nieważne. Przeprowadzenie tych prawideł wprawdzie również jest żmudne, ze względu jednak na proste i zajmujące wyniki, zadamy sobie ten trud.

Scholastycy znali osiem następujących prawideł syllogizmu:

1. Tum re, tum sensu, triplex modo terminus esto.
2. Nunquam contineat medium conclusio, oportet.
3. Neque ac praemissae extendat conclusio voces.
4. Aut semel aut iterum medius generaliter esto.
5. Ambae affirmantes nequeunt generare negantem.
6. Utraque si praemissa negat, nil inde sequetur.
7. Peiorem semper sequetur conclusio partim.
8. Nil sequitur geminis ex particularibus umquam.

Po polsku:

1. Co do rzeczy i co do sensu termin niech będzie tylko trojaki (t. zn. do syllogizmu mają wchodzić nietylko trzy słowa, ale też trzy, a nie cztery, sensy).
2. Trzeba, aby wniosek nie zawierał nigdy (terminu) średniego.
3. Wniosek niech nie będzie ogólniejszym od przesłanek.
4. Raz albo więcej termin średni niech będzie wziętym ogólnie.

5. Dwie (przesłanki) twierdzące nie mogą dać (wniosku) przeczącego.

6. Jeśli obie przesłanki są przeczące, nic stąd nie wynika.

7. Wniosek zawsze idzie pod każdym względem zosobna za (przesłanką) słabszą. (Za przesłankę słabszą pod względem jakości uważa się, przeczącą w stosunku do twierdzącej, pod względem zaś ilości — szczegółową w stosunku do ogólnej).

8. Nigdy nic nie wynika z dwóch szczegółowych (przesłanek).

Jeżeli się bliżej przyjrzymy powyższym regułom, to dostrzeżemy, iż pierwsze dwie nie są właściwie regułami w znaczeniu twierdzeń. One opisują syllogizm; należą do jego definicji. Dostały się one między prawidła syllogizmu poprostu przez nieporozumienie, jak to zresztą często bywa w rzeczach, które idą z tradycji. My się zatem zajmiemy tylko ostatniemi sześcioma prawidłami; sformułujemy je jednak inaczej i przytem siódme prawidło rozszczepimy na dwa. Ułożymy je również w innym porządku, dla ułatwienia sobie dowodów. Wreszcie, dla własnego użytku — gdyż później będziemy się na nie powoływali — nadamy im nazwy. Każde prawidło wyrażonem będzie w trzech postaciach równoważnych; z jednej postaci do drugiej będzie można przejść przez proste przekształcenia z teorji zdań, intuicyjnie zupełnie jasne. Dodajemy nareszcie, iż do numeracji naszych prawideł użyjemy cyfr rzymskich; arabskie, obok w nawiasach, będą odsyłały do odpowiedniego prawidła w postaci tradycyjnej, wyżej przez nas zacytowanej.

Oto teraz same te prawidła:

I. (8). Prawidło przesłanek szczegółowych.

1) Jeżeli obydwie przesłanki są szczegółowe, to przesłanki te nie dają wniosku.

2) Jeżeli przesłanki dają wniosek, to przynajmniej jedna z nich jest ogólna.

3) Jeżeli przesłanki dają wniosek i jedna z nich jest szczegółowa, to druga jest ogólna.

II. (6). Prawidło przesłanek przeczących.

1) Jeżeli obydwie przesłanki są przeczące, to przesłanki te nie dają wniosku.

2) Jeżeli przesłanki dają wniosek, to przynajmniej jedna z nich jest twierdząca.

3) Jeżeli przesłanki dają wniosek i jedna z nich jest przecząca, to druga jest twierdząca.

III. (4). Prawidło terminu średniego.

1) Jeżeli w obydwu przesłankach termin średni jest wzięty szczegółowo, to przesłanki te nie dają wniosku.

2) Jeżeli przesłanki dają wniosek, to przynajmniej w jednej z nich termin średni jest wzięty ogólnie.

3) Jeżeli przesłanki dają wniosek i w jednej z nich termin średni jest wzięty szczegółowo, to w drugiej jest wzięty ogólnie.

IV. (3). Prawidło terminów głównych. (Terminami głównymi nazywamy terminy, mające występować we wniosku).

1) Jeżeli przesłanki dają wniosek i jeden z terminów głównych jest wzięty we wniosku ogólnie, to termin ten w przesłance wzięty jest ogólnie.

2) Jeżeli jeden z terminów głównych jest wzięty w przesłance szczegółowo, to albo przesłanki nie dają wniosku, albo ten termin jest wzięty we wniosku szczegółowo.

3) Jeżeli jeden z terminów głównych jest wzięty w przesłance szczegółowo i przesłanki dają wniosek, to termin jest wzięty we wniosku szczegółowo.

V. (5). Pierwsze prawidło wniosku twierdzącego.

1) Jeżeli obydwie przesłanki są twierdzące i dają wniosek, to wniosek jest twierdzący.

2) Jeżeli przesłanki dają wniosek i wniosek jest przeczący, to przynajmniej jedna z przesłanek jest przecząca.

3) Jeżeli przesłanki dają wniosek i wniosek jest przeczący a jedna z nich jest twierdząca, to druga jest przecząca.

VI. (7). Drugie prawidło wniosku twierdzącego.

1) Jeżeli przesłanki dają wniosek i wniosek ten jest twierdzący, to obydwie przesłanki są twierdzące.

2) Jeżeli przynajmniej jedna z przesłanek jest przecząca, to albo przesłanki wniosku nie dają, albo wniosek jest przeczący.

3) Jeżeli przynajmniej jedna z przesłanek jest przecząca i przesłanki dają wniosek, to wniosek jest przeczący.

VII. (7). Prawidło wniosku ogólnego.

1) Jeżeli przesłanki dają wniosek i wniosek ten jest ogólny, to obydwie przesłanki są ogólne.

2) Jeżeli przynajmniej jedna z przesłanek jest szczegółowa, to albo przesłanki nie dają wniosku, albo wniosek jest szczegółowy.

3) Jeżeli przynajmniej jedna z przesłanek jest szczegółowa i przesłanki dają wniosek, to wniosek ten jest szczegółowy.

Przy uzasadnianiu naszych prawideł korzystać będziemy z pewnej cechy nieważności trybów. Cecha ta polega na tem, że, chcąc się przekonać o nieważności jakiegokolwiek trybu, możemy tryb ogólny zastąpić przez jakikolwiek szczególny przypadek; jeżeli tryb ogólny jest ważny, to i w tym szczególnym przypadku daje wniosek. jeżeli więc w tym szczególnym wypadku wniosku nie daje, to jest nieważny. W szczególności mamy więc prawo zastępowania któregokolwiek ze zdań: *A*, *E*, *I*, *O*, przez dowolne zdanie elementarne, a więc

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ lub } \varepsilon,$$

wchodzące w skład tego zdania. Dla ułatwienia sobie tego rodzaju postępowania, uzasadnimy najpierw trzy lematy, dotyczące trybów elementarnych. t. j. takich, których przesłanki są zdaniami elementarnemi.

Lemat I. — Dwie przesłanki $\delta$ wniosku nie dają.

Nie rozróżniamy tutaj figur, gdyż, jak widzieliśmy, zdania $\delta$ są odwracalne bez żadnych ograniczeń; jakikolwiek więc byłby tryb, przesłanki sprowadzą się do tego samego. Dowód lematu będzie się składał z dwóch części. Wykażemy najpierw, że rozważany tryb nie daje wniosku przeczącego, t. j ani *E* ani *O*, później zaś obalimy wniosek twierdzący. a więc *A* lub *I*. Zwracając się do pierwszej części, zastosujemy najpierw metodę poglądową kół Eulera. Nie będzie ona jeszcze stanowiła samego dowodu, ale naprowadzi nas nań.

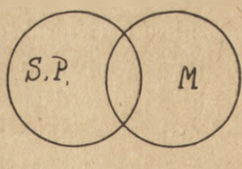



Fig. 3.

Przesłanki nasze, na takim rysunku, wyrażą się tem, iż koła, przedstawiające *S* i *P*, mają się przecinać z kołem, przedstawiającem termin średni *M*. Jeżeli tedy terminy główne się zlewają, t. j. wyobraża je jedno i tosamo koło, przecinające się oczywiście z *M*, to przesłanki są spełnione, a między tymi terminami zachodzi związek

$$S\,\alpha\,P$$

Niema zatem ani *SEP* ani *SOP* (zob. fig. 3).

To samo możemy ściśle wyrazić, jak następuje. Niech małe litery oznaczają rozłączne, t. j. wzajemnie się wykluczające klasy. Jeżeli tedy *(S)* składa się z *(a)* i *(c)* i *(P)* tak samo, *(M)* zaś składa się z *(a)* i *(b)*, to obie przesłanki są spełnione, pomiędzy zaś *S* i *P* zachodzi związek $\alpha$, a więc ani *E* ani *O*.

Równie łatwo wykazać, że z rozważanych przesłanek nie wynika żaden wniosek twierdzący. W rzeczy samej, zwracając się znowuż do kół Eulera, wyobrazić sobie możemy sytuację, w której wprawdzie koła *S* i *P* przecinają koło *M*, ale nie mają punktów wspólnych. Przesłanki znowuż są sprawdzone, ale mamy

$$S \varepsilon P,$$

a więc ani *SAP* ani *SIP*.

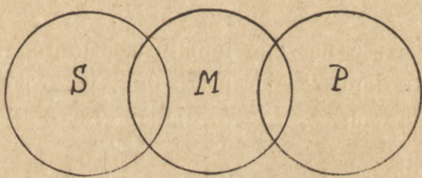



Fig. 4.

To samo możemy ściśle wyrazić jak następuje. Niech, przy zachowaniu poprzedniej umowy, dotyczącej oznaczeń, klasa *(S)* składa się z elementów klas *(a)* i *(c)*, *(P)* — z *(b)* i *(d)*, *(M)* zaś — z *(a)* i *(b)*. Przesłanki znowuż są spełnione a pomiędzy *S* i *P* zachodzi związek $\varepsilon$, więc ani *A* ani *I*. (Schemat ten jest wprawdzie nieco prostszy, niż ten, któryby odpowiadał naszym poprzednim rozważaniom na kołach Eulera, gdyż na fig. 4. są *M*, które nie są ani *S*, ani *P*, tego rodzaju różnice są jednak zupełnie nieistotne).

Lemat I udowodnionym jest w zupełności; przechodzimy więc do następnego.

Lemat II. — Dwie przesłanki $\varepsilon$ wniosku nie dają.

Z tych samych powodów co przy lemacie I, figur nie potrzebujemy rozróżniać. Podobnie też, jak w dowodzie lematu I, chcemy najpierw obalić wniosek przeczący. Wyrażając się poglądowo, możemy powiedzieć, że przesłanki oznaczają, iż koła wyobrażające *S* i *P* nie mają mieć punktów wspólnych z kołem, wyobra-

żającem *M*; między sobą jednak mogą być nawet identyczne. Mamy wówczas:

$$S \alpha P,$$

a więc ani *SEP* ani *SOP*.

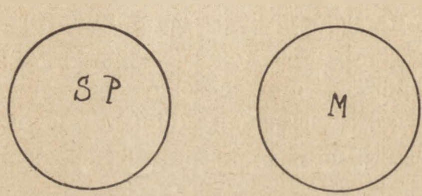



Fig. 5.

Można też tak powiedzieć: Niech *(S)* i *(P)* będą identyczne z *(a)*, *M* zaś — z *(b)*; przesłanki tedy są spełnione a między *S* i *P* zachodzi stosunek $\alpha$ a więc ani *E* ani *O*.

Aby drugą część naszego lematu uzasadnić, wystarczy zauważyć, że przesłanki dopuszczają przypadek, w którymby żadne dwa z kół, wyobrażających *S*, *P*, *M*, nie miały punktów wspólnych. Będzie tedy

$$S \varepsilon P,$$

a więc ani *SAP* ani *SIP*.




Fig. 6.

Innemi słowy: Niech *(S)* będzie identyczne z klasą *(a)*, *(P)* z *(b)*, *(M)* z *(c)*. I w tym przypadku przesłanki są sprawdzone, ale pomiędzy *S* i *P* zachodzi stosunek $\varepsilon$, a więc ani *A* ani *I*.

Lemat II udowodnionym jest w zupełności, przechodzimy więc do następnego:

Lemat III. — Dwie przesłanki, z których większa jest $\delta$, a mniejsza — $\varepsilon$ wniosku nie dają.

I tutaj figur rozróżniać nie potrzebujemy; mówiąc obrazowo, przesłanki na tem polegają, iż koło *P* ma się przecinać z kołem *M*,

*S* zaś nie ma mieć z niem nic wspólnego. Możliwym jest tedy wypadek, w którym koło *S* znajduje się w całości w tej części koła *P*, która leży poza obrębem koła *M*. Mamy tedy

$$S \beta P,$$

a więc ani *SEP* ani *SOP*.

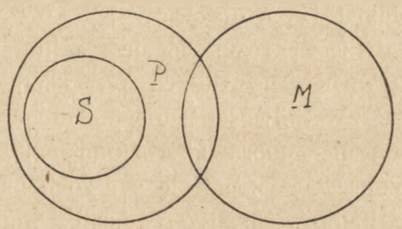



Fig. 7.

Jeżeli natomiast, co również dopuszczają przesłanki, *S* leży całkowicie w tej części płaszczyzny, która się znajduje poza *M* i poza *P*, to mamy

$$S \varepsilon P,$$

a więc ani *SAP* ani *SOP*.

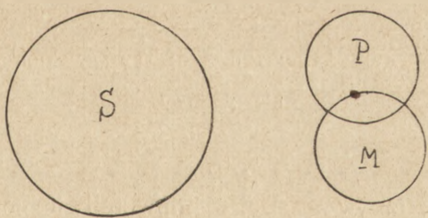



Fig. 8.

Dowód właściwy lematu III, przedstawia się więc jak następuje. Przesłanki nie wykluczają ani przypadku, w którymby *(S)* składało się z osobników klasy *(a)*, *(P)* — z *(a)* i *(b)*, za *(M)* — z *(b)* i *(c)*, ani też przypadku, w którymby *(S)* składało się z osobników klasy *(a)*, *(P)* z *(b)* i *(c)*, *(M)* zaś — z *(c)* i *(d)*. Ale w pierwszym wypadku zachodzi $S \beta P$, a więc ani *SEP* ani *SOP*, w drugim zaś — $S \varepsilon P$. a więc ani *SAP* ani *SIP*. Wniosku zatem istotnie niema.

Opierając się na powyższych lematach, możemy z łatwością uzasadnić prawidło przesłanek szczegółowych. W rzeczy samej, weźmy je w postaci pierwszej. Stosując cechę nieważności trybów, zauważamy, iż zdanie szczegółowe dopuszcza zawsze relację $\delta$ pomię-

dzy podmiotem a orzeczeniem, wobec czego możemy w naszym przypadku zastąpić przesłanki przez przesłanki typu $\delta$, które jednak. w myśl lematu I., wniosku nie dają. Prawidło I. jest w ten sposób uzasadnione.

Dowód prawidła przesłanek przeczących różni się od powyższego tylko tem, że przesłanki zastępujemy przesłankami, nie $\delta$. a $\varepsilon$, i stosujemy lemat II., a nie I.

Ciekawą jest rzeczą rozejrzeć się po literaturze logiki i zobaczyć co o tych dwóch prawidłach piszą najwybitniejsi logicy. Już Boecjusz wyraża wątpliwości odnośnie do prawidła przesłanek przeczących, przytaczając poprawne rozumowanie, znalezione u Platona, w którem wniosek wyciąga się z dwóch przesłanek przeczących. Cały szereg logików ma tego rodzaju wątpliwości. Jevons, jeden z najgłębszych logików, podaje również przykład, mający obalać prawidło przesłanek przeczących i dodaje, że nie zna sposobu objaśnienia tego. Tryb, o który mu chodzi, ma postać następującą:

$$\frac{\begin{array}{c}(-x)\,E\,y\\ z\,E\,x\end{array}}{z\,E\,y}$$

Sigwart *), przytaczając ten sam tryb w postaci:

$$\frac{\begin{array}{c}(-M)\,E\,P\\ S\,E\,M\end{array}}{S\,E\,P}$$

zauważa słusznie, iż „wniosek jest niewątpliwie poprawny; ale błędem jest, jakoby on wynikał z dwóch przeczących przesłanek w sensie Arystotelesa, gdyż zdanie: to, co nie jest $M$, nie jest $P$, jest tylko formalnie (dem Ausdruck nach) przeczącem, w rzeczywistości zaś jest równoznacznem ze zdaniem: każde $P$ jest $M$..." Dodać należy, iż w powyższym trybie przesłanki nie są wyrażone w tej formie, jakiej wymaga syllogistyka (niema terminu średniego!); skoro zaś zastąpimy przesłankę większą przez równoważną jej przesłankę

$$P\,A\,M,$$

to uzyskamy układ przesłanek trybu Camestres, dający istotnie wniosek

$$S\,E\,P,$$

*) Logik, Bd. I., wydanie z 1889 r., str. 456, odsyłacz.

ale to nie jest bynajmniej sprzecznem z prawidłem przesłanek przeczących.

Biegański *), zacytowawszy ustępy i z pism Jevonsa i Sigwarta, mówi: „Sigwart uznaje jego (t. j. powyższego syllogizmu) prawidłową budowę, ale powiada, że przesłanka większa jest w nim tylko pozornie przeczącą i właściwie wyraża myśl, że wszystkie *M* są *P*. Gdyby nawet tak było, gdybyśmy przesłankę „wszystko, co nie jest *M*, nie jest *P*“ zamienili na przesłankę twierdzącą „wszystkie *M* są *P*“, to i wtedy wniosek „*S* nie jest *P*“ nie dałby się uzasadnić, gdyż syllogizm ma formę figury pierwszej, w której tryb *AE* należy do niewnioskujących. Wyjaśnienie więc Sigwarta nie da się w danym przypadku utrzymać“. Błąd Biegańskiego polega na tem, że, przytaczając Sigwarta, bierze przesłankę *MAP* zamiast *PAM*; nic dziwnego, iż wówczas wniosek nie wychodzi!

Bolzano także, ten biegły i głęboki logik, tkniętym był nieco krytyką klasycznej syllogistyki; widać, że odnosił się do niej z nieufnością. Przeciwko temu samemu prawidłu przesłanek przeczących podaje on, jako argument, przykład następującego syllogizmu:

$$\frac{\begin{array}{c} M\,E\,P \\ M\,E\,S \end{array}}{(-S)\,I\,(-P)}$$

I ten przykład łatwo objaśnić. W rzeczy samej, obróciwszy przesłankę mniejszą, otrzymamy

$$M\,A\,(-S).$$

Będziemy wówczas mieli przesłanki trybu Felapton figury III z wnioskiem:

$$(-S)\,OP \text{ czyli } (-S)\,I\,(-P).$$

Wniosek jest więc niewątpliwie słusznym, ale nie jest to taki wniosek, o jaki chodzi, dotyczy on bowiem związku pomiędzy (— *S*) a (— *P*), nie zaś pomiędzy *S* i *P*, t. j. nie ma postaci:

$$S\,H\,P,$$

gdzie *H* jest *A*, *E*, *I* lub *O*.

Dziwić się tylko można, iż tylu wybitnych i poważnych logików, tak powierzchownie traktuje te rzeczy!

*) Teorja logiki, str. 352 i 353.

Powracamy teraz do sprawy obalenia trybów nieważnych. Po uzasadnieniu pierwszych dwóch prawideł syllogizmu, mamy przed sobą dwie drogi. Pierwsza polega na uzasadnieniu jeszcze jednego twierdzenia, obalającego pewien tryb we wszystkich figurach, a następnie na obaleniu każdego z pozostających trybów nieważnych zosobna, przez zastosowanie cechy nieważności trybów. Droga ta jest wprawdzie krótsza, ale mało zajmująca, więc naszkicujemy ją tylko.

Uzasadniamy najpierw twierdzenie następujące: Tryb, w którym przesłanka większa jest postaci *I*, mniejsza zaś — *E*, jest nieważny. Twierdzenie to, przez zastąpienie przesłanki *I* przez $\delta$, zaś *E* — przez $\varepsilon$, sprowadza się do udowodnionego już przez nas lematu III. Na podstawie dwóch pierwszych prawideł syllogizmu, tudzież powyższego twierdzenia odrzucić możemy już te wszystkie tryby, które w żadnej figurze wniosku nie dają. Istotnie, zwracając się do tablicy, zestawiającej wszystkie możliwe tryby w każdej figurze, możemy z niej, jako zawsze nieważne, wykreślić tryby: *EE*, *EO*, *OE*, *OO* — na podstawie prawidła drugiego; *II*, *IO*, *OI* — na podstawie prawidła pierwszego; *IE* — na podstawie wspomnianego twierdzenia. Z szesnastu odpada więc ośm kombinacyj; pozostaje ośm następujących:

*AA*, *AE*, *AI*, *AO*.
*EA*, *EI*.
*IA*.
*OA*.

W czterech figurach daje to 32 tryby, z których tylko 19 jest ważnych, a więc 13 nieważnych. Do obalenia tych trybów wystarcza obalić cztery tryby elementarne, albowiem nieważność $(\beta\beta)_2$ obala $(IA)_1$, $(OA)_1$, $(AA)_2$, $(AI)_2$, $(IA)_1$, $(AI)_4$, $(AO)_4$, nieważność $(\beta\varepsilon)_2$ obala $(AE)_1$, $(AO)_1$, $(AE)_3$ i $(AO)_3$; tryb $(\gamma\alpha)_2$ obala wniosek przeczący, zaś $(\varepsilon\alpha)_2$ — twierdzący dla $(OA)_2$ i $(OA)_4$ (wskaźniki przy nawiasach oznaczają tutaj figury).

Szczegółowe przeprowadzenie zaznaczonego tutaj rozumowania polecamy jako dobre ćwiczenie; tymczasem zwracamy się do dowodu dalszych prawideł syllogizmu, które również doprowadzą do obalenia trybów nieważnych. Ta metoda obalenia trybów nieważnych, jakkolwiek zawilsza, odróżnia się jednak od innych większą elegancją i nastręcza bardziej zajmujące dowody. Wyszczególnione

już przez nas prawidła syllogizmu rozbić można na trzy grupy następujące: 1. Prawidła przesłanek (I. i II.) 2. Prawidła terminów (III. i IV.) 3. Prawidła wniosków (V., VI. i VII.). Pierwszą grupę już uzasadniliśmy; przechodzimy obecnie do drugiej.

Prawidło terminu średniego weźmiemy w pierwszej postaci. Jeżeli tedy w pierwszej przesłance termin $M$ jest wzięty szczegółowo, to możemy nazwać $M'$ te właśnie $M$, o które tam chodzi. Podobnie możemy oznaczyć przez $M''$ te $M$, o które chodzi w drugiej przesłance. Ale $M'$ i $M''$ będą mogły nie mieć ze sobą nic wspólnego. Nie będzie zatem właściwie terminu średniego, bo będą cztery terminy, taki zaś układ przesłanek wniosku dać nie może. W podobny sposób uzasadnić można prawidło terminów głównych, n. p. w trzeciej postaci. Istotnie, jeżeli $P$ jest wzięte w przesłance szczegółowo, to możemy oznaczyć przez $P'$ te $P$, o które tam chodzi; o pozostałych $P$ nic właściwie nie wiemy. Wobec tego nie można rozciągać wniosku na wszystkie $P$; możnaby go rozciągnąć tylko na wszystkie $P'$.

Dokładna analiza logiczna tych dwóch dowodów byłaby jednak trochę trudną. Dlatego obok nich podajemy niżej dowody, posługujące się metodami analogicznemi do tych, których używaliśmy do uzasadnienia pierwszych dwóch prawideł syllogizmu. Przedtem jednak musimy uzasadnić następujący, prosty lemat:

Jeżeli jakiś dowolny termin, $S$, w zdaniu, łączącem go z jakimś terminem dowolnym, $P$, wzięty jest szczegółowo, to zdanie to, dopuszcza stosunek

$$P \beta S$$

pomiędzy tymi terminami. W rzeczy samej, tabelka zakresu podmiotu i orzeczenia w zdaniu orzekającem wskazuje odrazu, iż zdanie to może być tylko

$$PAS,\ PIS,\ SIP \text{ lub } SOP.$$

Ale pierwsze dwa z tych zdań z definicji dopuszczają stosunek:

$$P \beta S,$$

pozostałe dwa zaś dopuszczają z definicji:

$$S \gamma P \text{ czyli } P \beta S.$$

W ten sposób lemat jest udowodniony.

Z lematu tego, przy uwzględnieniu cechy nieważności trybów

wynika, iż dla dowodu prawidła terminu średnięgo, możemy przesłanki zastąpić przez

$$P \beta M$$
$$S \beta M.$$

Ale taki tryb wniosku nie daje. Obrazowo mówiąc, przesłanki oznaczają, iż koła, wyobrażające *S* i *P* leżą wewnątrz koła, wyobrażającego *M*; mogą one jednak albo się zlewać,

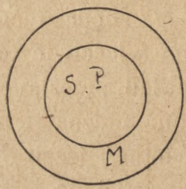


Fig. 9.

albo nie mieć nic wspólnego (zob. fig. 9. i 10.). Ściślej: przesłanki dopuszczają zarówno przypadek, w którym *(S)* składa się z *(a)* i *(P)* tak samo, *M* zaś z *(a)* i *(b)*, jak też przypadek, w którym *(S)* składa się z *(a)*, *(P)* z *(b)*, *(M)* zaś z *(a)* i *(b)*. W pierwszym przypadku mamy

$$S \alpha P,$$

co wyklucza wniosek przeczący, w drugim zaś —

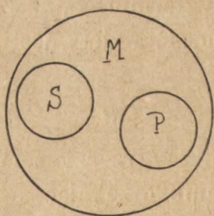


Fig. 10.

$$S \varepsilon P,$$

co wyklucza wniosek twierdzący. Tym sposobem prawidło jest uzasadnione.

Zwracamy się teraz do prawidła terminów głównych. Musimy je uzasadnić osobno dla terminu większego, osobno dla mniejszego. Jeżeli więc termin większy jest w przesłance wzięty szczegółowo, to można przesłankę większą zastąpić (w myśl lematu) przez:

$$M \beta P.$$

Jeśli teraz przesłanka mniejsza jest twierdząca, to można ją zawsze zastąpić przez

$$S \alpha M,$$

jeżeli zaś jest przecząca, to można ją zastąpić przez

$$S \varepsilon M.$$

Otóż w pierwszym przypadku (szczególny wypadek trybu Barbara), mamy wniosek

$$SAP,$$

który wyklucza

$$SOP \text{ i } SEP.$$

W drugim przypadku wniosku niema, ale wystarczy nam wiedzieć, że może być *SAP*. W rzeczy samej, obrazowo mówiąc, przesłanki wyrażają, iż koło *M* znajduje się wewnątrz koła *P*, koło zaś *S* nie

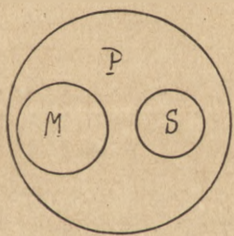



Fig. 11.

ma nic wspólnego z kołem *M*; może ono jednak leżeć także wewnątrz koła *P* (zob. fig. 11). Ściślej: przesłanki dopuszczają przypadek, w którym *(S)* składa się z *(a)*, *(P)* składa się z *(a)* i *(b)*, *(M)* zaś — z *(b)*. Wówczas zachodzi znowu

$$S \beta P, \text{ a więc } SAP,$$

co wyklucza

$$SOP \text{ i } SEP.$$

Jeżeli zatem tryb dopuszcza wniosek, to może on być tylko

$$SAP \text{ lub } SIP;$$

ale w takim wniosku *P* jest wzięte szczegółowo. Pierwsza część prawidła jest więc udowodniona.

Zwracając się teraz do terminu mniejszego, zauważmy, iż tutaj możemy przesłankę mniejszą zastąpić przez

$$M \beta S.$$

Większa, jeśli jest twierdząca, to dopuszcza

$$M\, \alpha\, P,$$

a jeśli jest przecząca, to dopuszcza

$$M\, \varepsilon\, P.$$

W pierwszym wypadku $M$ jest tem samem co $P$, a więc jest

$$P\, \beta\, S \text{ czyli } S\, \gamma\, P,$$

co wyklucza wniosek ogólny. W drugim przypadku wniosku niema, ale nam wystarczy wiedzieć, że może być

$$S\, \gamma\, P.$$

W rzeczy samej, przesłanki nasze wyrażają, mówiąc obrazowo, iż koło, wyobrażające $M$ leży wewnątrz koła $S$ i niema nic wspólnego z kołem $P$. Ale to nie wyklucza tego, by koło $P$ leżało także we-

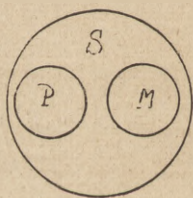



Fig. 12.

wnątrz koła $S$. Ściślej: przesłanki dopuszczają kombinację następującą: *(S)* składa się z (*a*) i (*b*), *(P)* — z (*b*), *(M)* zaś z (*a*). Wówczas jest właśnie

$$S\, \gamma\, P.$$

Jeżeli zatem tryb dopuszcza wniosek, to może on być tylko szczegółowym; zatem $S$ jest wzięte we wniosku szczegółowo. W ten sposób zupełnie uzasadnionem jest prawidło IV.

Zwracamy się teraz do trzeciej z kolei grupy prawideł, a przedewszystkiem do pierwszego prawidła wniosku twierdzącego. Możemy je wziąć w pierwszej postaci. Chodzi więc o obalenie wniosku przeczącego. To można uskutecznić przez zastosowanie cechy nieważności trybów. W rzeczy samej przesłanki twierdzące dopuszczają zawsze relację $\alpha$ pomiędzy terminami, które do nich wchodzą. Ze względu na odwracalność tej relacji, możemy je napisać w postaci:

$$M\, \alpha\, P$$
$$S\, \alpha\, M.$$

Mamy szczególny przypadek trybu Barbara z wnioskiem

$$SAP,$$

który wyklucza, na podstawie związków kwadratu logicznego, zarówno *SEP*, jak *SOP*. Tem samem prawidło jest uzasadnione.

Przechodzimy teraz do drugiego prawidła wniosku twierdzącego. Udowodnimy je w trzeciej postaci. Poprzednik mówi, iż przynajmniej jedna przesłanka ma być przeczącą, ale ponieważ dwie przeczące wniosku nie dają, możemy przyjąć, iż są one różnej jakości. W tych warunkach obalimy wniosek twierdzący przez cechę nieważności trybów. Możemy, istotnie, zastąpić przesłankę twierdzącą przez $\alpha$, przeczącą zaś przez $\varepsilon$. Oznaczmy dalej przez $Q$ ten z terminów głównych, który wchodzi do przesłanki twierdzącej, $R$ zaś — ten, który wchodzi do przeczącej. Obie przesłanki są odwracalne a porządek, w którym je zestawimy, jest obojętnym; możemy je więc wziąć w postaci:

$$M \varepsilon R$$
$$Q \alpha M$$

Mamy tu szczególny przypadek trybu Celarent z wnioskiem:

$$QER \text{ czyli } REQ.$$

Mamy więc

$$SEP,$$

co wyklucza wniosek twierdzący. Prawidło VI. jest więc uzasadnione.

Do dowodu ostatniego prawidła potrzebne są jeszcze dwa lematy następujące:

Lemat A. — Jeżeli dwie przesłanki dają wniosek i w tych przesłankach trzy razy termin jest wzięty ogólnie, to przesłanki te są koniecznie *A* i *E*. Istotnie, ponieważ każda przesłanka zawiera tylko dwa terminy, w jednej z nich oba terminy muszą być wzięte ogólnie; ale taka przesłanka nie może być inną jak *E*. Druga przesłanka musi więc być twierdząca i zawierać jeden termin wzięty ogólnie. Termin ten jednakże nie może być orzeczeniem, gdyż wówczas zdanie byłoby przeczące; jest to zatem podmiot. Ale skoro podmiot jest wzięty ogólnie, zdanie jest ogólne. Ogólnem zaś i twierdzącem zarazem, może być tylko zdanie *A*. Tym sposobem lemat udowodnionym jest w całości.

Lemat B. — Jeżeli dwie przesłanki dają wniosek *SAP*, to tryb jest koniecznie Barbara. W rzeczy samej, załóżmy iż jakieś

dwie przesłanki dają wniosek *A*; jest on zatem twierdzący. W takim razie (drugie prawidło wniosku twierdzącego, w pierwszej postaci) obie przesłanki są również twierdzące. Termin *S* jest wzięty we wniosku ogólnie; w przesłance więc także. A ponieważ przesłanka jest twierdząca — może on tylko być jej podmiotem. Przesłanka mniejsza jest więc ogólna: że zaś jest przytem twierdzącą, musi ona być

*SAM.*

Termin *M* jest wzięty w tej przesłance szczegółowo; wobec tego w przesłance większej jest wzięty ogólnie. Rozumując dalej dla tej przesłanki zupełnie podobnie, jak dla przesłanki mniejszej, dochodzimy do wniosku, iż nie może być inną, jak tylko

*MAP.*

Mamy więc rzeczywiście przesłanki trybu Barbara.

Dowód prawidła wniosku ogólnego jest teraz całkiem prosty. Istotnie, weźmy je w pierwszej postaci. Jeżeli tedy wniosek jest ogólny, to jest on

*SAP* albo *SEP.*

W pierwszym przypadku tryb jest Barbara (lemat B); przesłanki są więc rzeczywiście obie ogólne. W drugim przypadku, oba terminy główne są wzięte we wniosku ogólnie; są więc wzięte ogólnie także w przesłankach. Nadto termin średni musi być choć raz wziętym ogólnie. W przesłankach zatem trzy albo cztery razy termin jest wzięty ogólnie. Nie może jednak być cztery razy wziętym ogólnie, gdyż wówczas w każdej z przesłanek oba terminy byłyby wzięte ogólnie, t. j. obie przesłanki byłyby *E*, a więc przeczące, co jest wykluczonem, ponieważ dają wniosek (prawidło przesłanek przeczących). Wobec tego trzy razy w przesłankach termin jest wzięty ogólnie, a więc (lemat A) przesłanki te są *A* i *E*, rzeczywiście ogólne. Prawidło jest więc uzasadnione w obu przypadkach.

Uzasadniliśmy więc w całości prawidła ogólne syllogizmu. Możemy teraz zająć się wyciąganiem z nich wniosków. Pierwszy z tych wniosków jest następujący:

Tryb, w którym przesłanka większa jest *I*, a mniejsza *E*, jest nieważny. Dowodziliśmy już tego przez zastosowanie cechy nieważności trybów; obecnie wyprowadzimy to z prawideł syllogizmu. Istotnie, ponieważ jedna z przesłanek jest przecząca, wniosek mu-

siałby być przeczącym, wskutek czego termin większy byłby w nim wzięty ogólnie. Powinienby zatem termin *P* być wziętym ogólnie w przesłance większej, ale jest to niemożliwe, ponieważ przesłanka ta jest *I*, skąd wypływa, iż oba terminy są wzięte szczegółowo. Z tego wynika, iż wniosku niema, c. b. d. o.

Można również pokazać, że, jeśli jedna z przesłanek jest *O*, a tryb jest ważny, to należy on do figury II. lub III. Istotnie, z prawideł VI. i VII. wynika, iż wniosek może być tylko

*SOP.*

Z drugiej strony, z obu prawideł przesłanek wynika, że, skoro jedna przesłanka jest *O*, to druga musi być *A*. Albo więc przesłanka większa jest *A*, a mniejsza — *O*, albo naodwrót. W pierwszym przypadku, ponieważ *P* jest wzięte we wniosku, a więc i w przesłance, ogólnie, musi termin większy być podmiotem większej przesłanki. Musi ona zatem być:

*PAM.*

Termin średni jest tutaj wzięty szczegółowo, a więc w przesłance mniejszej musi być wzięty ogólnie; ponieważ zaś ta ostatnia jest *O*, musi on być jej orzeczeniem. Jest tedy przesłanka mniejsza

*SOM.*

Poznajemy przesłanki trybu Baroco figury II. W drugim przypadku przesłanka większa jest *O*. Ponieważ *P* jest w niej wzięte ogólnie, musi być przesłanka

*MOP.*

Termin średni jest tutaj wzięty szczegółowo, zatem w przesłance mniejszej jest wzięty ogólnie; a że ta ostatnia jest *A*, musi on być jej podmiotem. Przesłanka mniejsza jest więc

*MAS.*

Teraz znowu mamy przesłanki trybu Bocardo figury III. Twierdzenie więc jest więc uzasadnione.

Dalszem zastosowaniem prawideł syllogizmu są prawidła figur. Oto one:

Prawidło przesłanki mniejszej w figurze I. i III.

Jeżeli tryb figury I. albo III. jest ważny, to mniejsza przesłanka jest twierdząca.

Dowód. — Wniosek może być twierdzący albo przeczący. W przypadku pierwszym, podług drugiego prawidła wniosku twierdzącego w postaci 1., obydwie przesłanki muszą być twierdzące; więc i mniejsza będzie twierdząca. W przypadku drugim, będzie we wniosku orzeczenie, $P$, jako w zdaniu przeczącem, wzięte ogólnie, więc, na podstawie prawidła terminów głównych, w postaci 1., musi $P$ być wziętem i w przesłance większej ogólnie. Ale ta przesłanka ma w figurach I. i III. postać

$$M - P,$$

więc orzeczenie jej będzie wzięte ogólnie. To zaś znaczy, że będzie ona przecząca. Stąd, na podstawie prawidła przesłanek przeczących, w postaci 3., druga przesłanka, t. j. mniejsza, musi być twierdząca, c. b. d. o.

Uwaga. — Jeżeli wziąć prawidło w postaci takiej: jeśli przesłanka mniejsza w figurze I. albo III. jest przecząca, to tryb jest nieważny, to można dlań podać dowód następujący: Na podstawie drugiego prawidła wniosku twierdzącego, w postaci 2., ponieważ mamy przesłankę przeczącą, albo wniosek nie istnieje, albo jest przeczący. W ostatnim przypadku, $P$ jest w nim wzięte ogólnie, a więc, na podstawie prawidła terminów głównych, w postaci pierwszej, w większej przesłance $P$ musi być również wzięte ogólnie; ale ona jest postaci:

$$M - P.$$

będzie to więc przesłanka przecząca. Będą zatem dwie przesłanki przeczące, więc, podług prawidła przesłanek przeczących, w postaci pierwszej, tryb będzie nieważny.

Prawidło przesłanki przeczącej w figurze II.

Jeżeli tryb figury II. jest ważny, to zawiera przesłankę przeczącą.

Dowód. — Dla dowodu nadamy temu twierdzeniu postać: jeżeli obie przesłanki są twierdzące, to tryb jest nieważny. Ponieważ termin średni w obydwóch jest orzeczeniem, więc w obydwóch, jako twierdzących, będzie wzięty szczegółowo. Zatem, podług prawidła terminu średniego, w postaci pierwszej, wniosku nie będzie.

Wniosek I. — Jeżeli tryb figury II. jest ważny, to jedna przesłanka jest twierdząca, a druga — przecząca, czyli przesłanki są różnej jakości. Istotnie, na podstawie powyższego prawidła przynajmniej jedna przesłanka jest przecząca. A, podług prawidła o prze-

słankach przeczących, w postaci 2., przynajmniej jedna musi być twierdząca. Jest więc jedna twierdząca i jedna przecząca.

Wniosek II. — Jeżeli tryb figury II. jest ważny, to wniosek jest przeczący. Istotnie, podług powyższego prawidła przynajmniej jedna z przesłanek jest przecząca. Stąd wynika, podług drugiego prawidła wniosku twierdzącego, w postaci 3., wniosek będzie przeczący.

Prawidło przesłanki większej w figurach I. i II. — Jeżeli tryb figury I. albo II. jest ważny, to większa przesłanka jest ogólna.

Dowód podamy osobno dla każdej z figur. Dla figury I., podług prawidła przesłanki mniejszej, mniejsza przesłanka jest twierdząca, więc orzeczenie jej *M*, jest wzięte szczegółowo. Zatem, podług prawidła terminu średniego, w postaci 3., w drugiej przesłance, t. j. większej, *M* musi być wzięte ogólnie. Ale w niej jest ono podmiotem, więc przesłanka ta będzie ogólna.

Dla figury II., podług wniosku II., wniosek jest przeczący, więc orzeczenie jego. *P*, jest wzięte ogólnie. Zatem, na podstawie prawidła terminów głównych, w postaci 1., *P* musi być wzięte ogólnie także w przesłance większej. Ale w niej jest podmiotem. Będzie więc ona zdaniem ogólnem.

Prawidło przesłanki mniejszej w figurze IV. Jeżeli tryb figury IV. daje wniosek twierdzący, to mniejsza przesłanka jest *A*.

Dowód. — Podług drugiego prawidła wniosku twierdzącego w postaci 1., obydwie przesłanki będą wtedy twierdzące. Ale w większej, *M* jest orzeczeniem, więc, jako w twierdzącej, jest wzięte szczegółowo. Stąd, podług prawidła terminu średniego, w postaci 3., wynika, iż w przesłance mniejszej musi *M* być wziętem ogólnie, a ponieważ jest w niej podmiotem, musi ona być ogólną, że zaś jest twierdzącą, nie może być inną, jak tylko *A*.

Możemy teraz, na podstawie powyższych twierdzeń, przystąpić do wykreślenia trybów nieważnych. W tym celu zestawmy sobie to, co prawidła figur dają dla każdej figury zosobna. A więc:

Jeżeli tryb jest ważny i należy do figury I., to większa przesłanka jest ogólna, a mniejsza jest twierdząca.

Jeżeli tryb jest ważny i należy do figury II., to większa przesłanka jest ogólna a przesłanki są różnej jakości.

Jeżeli tryb jest ważny i należy do figury III., to przesłanka mniejsza jest twierdząca.

Jeżeli tryb jest ważny i należy do figury IV., a wniosek jest

twierdzący, to przesłanka mniejsza jest *A*. Prócz tego, zastosujemy do figury IV. twierdzenie o nieważności trybu *IE* i o trybach zawierających przesłankę *O*.

Jakież tedy tryby ważne dopuszczają powyższe prawidła?

W figurze I.: Przesłanka większa musi być ogólna, zatem *A* lub *E*. Przesłanka mniejsza ma być twierdząca, więc *A* lub *I*. Cztery są zatem tryby możliwe:

*AA*, *AI*, *EA*, *EI*.

W figurze II.: Przesłanka większa ma być ogólna, więc *A* lub *E*. Przesłanka mniejsza musi się od niej różnić jakością, zatem w pierwszym przypadku może być *E* lub *O*, w drugim *A* lub *I*. Cztery są zatem tryby możliwe:

*AE*, *AO*, *EA*, *EI*.

W figurze III.: Przesłanka mniejsza może być *A* lub *I*. W pierwszym przypadku, przesłanka większa może być jakakolwiek, w drugim zaś, ze względu na prawidło przesłanek szczegółowych, w postaci 3., musi być ogólna, a więc *A* lub *E*. Sześć jest zatem trybów możliwych:

*AA*, *EA*, *IA*, *OA*, *AI*, *EI*.

W figurze IV.: Jeżeli wniosek jest twierdzący, to przesłanka większa jest także twierdząca, a więc *A* lub *I*, mniejsza zaś jest *A*. Jeżeli wniosek jest przeczący, to przynajmniej jedna z przesłanek jest przecząca. Ale dwie przeczące wniosku nie dają, wskutek czego przesłanki muszą być różnej jakości. Ale tryb nie może zawierać przesłanki *O*; przesłanka przecząca może więc być tylko *E*. A zatem jedna z przesłanek musi być *E*, druga zaś *A* lub *I*. Jednakowoż tryb *IE* jest wykluczonym. Pozostają więc tryby:

*AA*, *IA*, *EA*, *EI*, *AE*.

Uzasadniliśmy w rozdziale VI. wnioski z 19 trybów, wymienionych na początku. Odnajdujemy teraz te same tryby. Okazuje się mianowicie, że jeśli tryb jest ważnym, to jest jednym z tych trybów. Stąd, przez kontrapozycję, wynika, iż pozostałe tryby są nieważne. Aby więc uzasadnić w zupełności syllogistykę; trzeba jeszcze tylko pokazać, że podane przez nas wnioski dla wspomnianych trybów są najogólniejsze, t. j. ewentualne inne wnioski z nich wy-

nikają. Możnaby to uczynić przez zastosowanie cechy nieważności trybów, ale zrobimy to prościej i łatwiej, opierając się na prawidłach syllogizmu. W tym celu, zauważmy przedewszystkiem, że, jeśli wniosek jest twierdzący, to przesłanki muszą być obie twierdzące, wykluczonym jest więc wniosek przeczący. Odwrotnie, jeśli wniosek jest przeczący, to przynajmniej jedna przesłanka musi być przecząca, wskutek czego wniosek twierdzący jest wykluczonym. Zachodzić może zatem tylko wątpliwość, czy, obok podawanych przez nas wniosków niema innych wniosków tej samej jakości. Ale, jeśli wniosek jest

*SAP*,

to zachodzi wprawdzie również

*SIP*,

ale wynika to z samego wniosku na podstawie związków logicznego kwadratu; jest to t. zw. osłabiona konkluzja. Jeśli wniosek jest

*SEP*,

to, podobnież, mamy osłabioną konkluzję

*SOP*.

Jeżeli wniosek jest

*SIP*,

to możnaby się zapytać, czy nie zachodzi również zdanie ogólne tejże jakości,

*SAP*.

Przekonaliśmy się jednak (lemat B), że wniosek taki daje tylko tryb Barbara. I w tym przypadku zatem wniosek jest jedyny.

Przejdźmy więc do ostatniego przypadku, do przypadku, w którym wniosek jest

*SOP*.

Zachodzi tutaj pytanie, czy niema wniosku

*SEP*.

Jest to wniosek ogólny, potrzebaby zatem, aby obie przesłanki były ogólne. Dwa tylko tryby o przesłankach ogólnych dają wniosek

*SOP*,

mianowicie: tryb Felapton figury III. i tryb Fesapo figury IV. W tych trybach jednakże przesłanka mniejsza jest

*MAS.*

Termin mniejszy jest w niej wzięty szczegółowo, wskutek czego (prawidło terminów głównych) i we wniosku musi być wzięty szczegółowo, to znaczy, że wniosek musi być szczegółowy, nie może więc być

*SEP.*

Tym sposobem okazuje się, iż tryby syllogistyki, obok wymienionych przez nas wniosków, dają jedynie konkluzje osłabione. Stwierdzeniem tego, kończymy uzasadnienie syllogistyki.

ROZDZIAŁ VIII.

# Uzupełnienia i zastosowania logiki Arystotelesa.

Jako uzupełnienie wykładu syllogistyki klasycznej, podamy tu próby jej udoskonalenia, dokonane przez Leibniz'a i R. Grassmann'a. Leibniz, który bardzo wysoko cenił syllogistykę i często-kroć w swoich badaniach do niej powracał, zauważył, że tryb, dający wniosek *A*, daje tem samem wniosek *I*, a tryb, dający wniosek *E*, daje tem samem wniosek *O*. Jeżeli na tej podstawie utworzyć osobne tryby, to się doda do figury I. tryby: Barbari i Celaront, do figury II. — Cesaro i Camestros, do figury III. — Calemos. W ten sposób każda z figur będzie miała po sześć trybów, co się bardzo podobało Leibniz'owi. Te tryby dodane nie dają jednak nowych wniosków syllogistycznych, gdyż wnioski te wynikają z klasycznych przez wnioskowanie bezpośrednie.

Większe znaczenie mają uwagi Leibniz'a, dotyczące wywodu figur II.—IV. z trybów figury I. Zaprzeczając bowiem zdaniu Locke'go, który wyśmiewał t. zw. prawo tożsamości, *SAS* (każde *S* jest *S*), Leibniz słusznie podniósł, iż zdanie to, tak samo, jak każde inne, może służyć za przesłankę w dowodzie. Jako przykład, przytoczył on dowód odwrócenia przy pomocy syllogistyki. Ale klasyczne uzasadnienie trybów figur II.—IV. opierało się na tem samem odwróceniu. Aby więc uniknąć błędnego koła, musiał Leibniz poszukać sposobu sprowadzenia trybów figur II. i III. (IV. nie była mu potrzebną we wspomnianych dowodach) do figury I. bez korzystania z odwrócenia. Okazało się to istotnie możliwem, mianowicie przez reductio ad absurdum, tak, jak to się robi w syllogistyce klasycznej dla trybów Baroco i Bocardo. Pokażemy na jednym przykładzie,

jak to można tutaj uskutecznić. Weźmy więc tryb Camestres. Chodzi o to, by z przesłanek

*PAM*,
*SEM*,

wyprowadzić wniosek

*SEP*.

Załóżmy więc, że zachodzi

~ (*SEP*) czyli *SIP*.

Dołączając do tego przesłankę większą, otrzymujemy układ przesłanek

*PAM*
*SIP*.

Jest to tryb Darii figury I., z wnioskiem

*SIM*,

który przeczy przesłance mniejszej. Nie może zatem być *SIP*, a zatem musi być *SEP*, c. b. d. o.

Leibniz mniemał, że tryby figury IV. nie dadzą się sprowadzić do figury I. bez użycia konwersji. Tak jednak nie jest, jak wykazała panna Bakow z Odessy. Oto n. p., jak uzasadniamy tryb Bamalip. Przesłanki są:

*PAM*
*MAS*.

Chodzi o wniosek:

*SIP*.

Załóżmy więc

~ (*SIP*) czyli *SEP*.

Dołączając do tego przesłankę mniejszą,

*MAS*,

otrzymujemy układ przesłanek trybu Celarent figury I. z wnioskiem

*MEP*.

Dołączając do tego, z kolei, przesłankę większą,

*PAM*,

otrzymujemy znowu układ przesłanek trybu Celarent figury I., jeśli uważać *M* za termin średni. Wniosek jest zatem

*PEP*,

co przeczy prawu tożsamości. Musi być zatem *SIP*.

Posiadając uzasadnienie trybów wszystkich figur bez pomocy odwrócenia, możemy przystąpić do dowodzenia twierdzeń o odwracaniu podług Leibniza:

Odwrócenie *E*. — Załóżmy

$$SEP;$$

z prawa tożsamości mamy zawsze

$$PAP.$$

Uważajmy, za termin średni wspólne orzeczenie obu przesłanek; mamy więc przesłanki trybu Cesare figury II. z wnioskiem:

$$PES, \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Odwrócenie *I*. — Załóżmy

$$SIP;$$

z prawa tożsamości mamy zawsze

$$SAS,$$

Ustawiamy teraz tryb:

$$SAS$$
$$SIP,$$

w którym za termin średni przyjmujemy wspólny podmiot obu przesłanek. Mamy więc przesłanki trybu Datisi figury III. z wnioskiem

$$PIS.$$

Odwrócenie *A*. — Załóżmy

$$SAP.$$

Ustawiamy tedy tryb:

$$SAS$$
$$SAP,$$

uważając za termin średni wspólny podmiot. Mamy więc tryb Darapti figury III. z wnioskiem

$$PIS, \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Tak się przedstawiają Leibniz'owskie dowody odwrócenia. Można jednak podać dowód odwrócenia przy pomocy wyłącznie trybów figury I. przez reductio ad absurdum. Istotnie, dla dowodu odwrócenia *E*, przyjmijmy

$$SEP.$$

Jeżeli teraz przypuścimy

$$\sim(PES), \text{ t. j. } PIS,$$

to będziemy mieli przesłanki trybu Ferio z wnioskiem

$$POI,$$

który przeczy prawu tożsamości, *PAP*. Dla dowodu odwrócenia *I*. zakładamy *SIP* i $\sim(PIS)$, czyli *PES*, i ustawiamy przesłanki:

$$PES$$
$$SIP$$

trybu Ferio z wnioskiem:

$$SOS,$$

co znowu przeczy prawu tożsamości. Podobnież, do dowodu odwrócenia *A*, zakładamy *SAP* i $\sim(PIS)$, czyli *PES*. Mamy tedy tryb Celarent:

$$\frac{\begin{array}{c}PES\\SAP\end{array}}{SES.}$$

Ależ *SES* znowuż przeczy prawu tożsamości. Przyjąwszy tę metodę dowodu odwrócenia, nie musiałby Leibniz zmieniać klasycznego uzasadnienia trybów figur II.—IV.

Robert Grassmann zbadał syllogistykę zapomocą logiki matematycznej i doszedł do przekonania, że brakuje w niej ośmiu trybów. Nie spostrzegł jednak, że wnioski, jakie dają jego tryby, nie mają żądanej postaci:

$$S - P,$$

tylko

$$P - S.$$

I te wnioski zresztą można otrzymać przy pomocy klasycznej syllogistyki, trzeba tylko przestawić przesłanki. Aby więc te tryby otrzymać, trzeba zbadać, jaki wpływ wywiera na tryb przestawianie przesłanek. Tu należy zauważyć przedewszystkiem, że schematy figur wskazują, iż, przy takiem przekształceniu, tryby figury I. przechodzą w tryby figury IV. i naodwrót, natomiast tryby figur II. i III. przechodzą w tryby tych samych figur. Wobec tego. po przestawieniu przesłanek, tryb:

Barbara przechodzi w Bamalip
Celarent „ „ Calemes,

| | | | |
|---|---|---|---|
| Darii | przechodzi | w | Dimatis, |
| Ferio | „ | „ | tryb $(IE)_4$, nieważny, |
| Cesare | „ | „ | Camestres, |
| Camestres | „ | „ | Cesare, |
| Festino | „ | „ | tryb $(IE)_2$, nieważny, |
| Baroco | „ | „ | tryb $(OA)_2$, nieważny, |
| Darapti | „ | „ | siebie, |
| Felapton | „ | „ | tryb $(AE)_3$, nieważny, |
| Disamis | „ | „ | Datisi, |
| Datisi | „ | „ | Disamis, |
| Bocardo | „ | „ | tryb $(AO)_3$, nieważny, |
| Ferison | „ | „ | tryb $(IE)_3$, nieważny, |
| Bamalip | „ | „ | Barbara. |
| Calemes | „ | „ | Celarent, |
| Dimatis | „ | „ | Darii, |
| Fesapo | „ | „ | tryb $(AE)_1$, nieważny. |
| Fresison | „ | „ | tryb $(IE)_1$, nieważny. |

I oto, ujawniły się tryby Grassmanowskie! Są to zatem tryby następujące:

W figurze I: *IE*, *AE*,
W figurze II: *IE*, *OA*,
W figurze III: *IE*, *AE*, *AO*,
W figurze IV: *IE*.

Wszystkie te tryby dają wniosek: *POS*. Jest to wniosek względem *P*. *R*. Grassmann jednakże uważał to za wniosek względem *S* i dlatego uznawał za konieczne dodanie powyższych ośmiu trybów do klasycznych dziewiętnastu. Ale widzimy, iż jest to zbytecznem, bo dostajemy wnioski tych trybów, przez poszukiwanie wniosku względem *P* zapomocą klasycznej syllogistyki.

---

Poznaliśmy syllogistykę Arystotelesa. Widzieliśmy także, iż próby jej uzupełnienia nie doprowadziły do znaczącego rezultatu. Teraz z kolei, należy przejść do znaczenia, jakie ona posiada. Znaczenie to rozpatrzymy z dwojakiego punktu widzenia: teorji i praktyki. To znaczy, iż z początku będziemy wychodzili z założenia, że rozumowanie odbywa się w formie syllogistycznej, a potem zbadamy, czy to przypuszczenie odpowiada rzeczywistości.

Wartość prawideł syllogistycznych polega na tem, że wychodząc z przesłanek prawdziwych, przychodzimy zawsze do wniosków prawdziwych. Ale trzeba dobrze sobie uprzytomnić, iż ten związek nie daje się odwrócić, t. j., jeżeli do przesłanek, o których nie wiemy, czy są prawdziwe, czy nie—stosujemy prawidła syllogistyczne i otrzymujemy wniosek prawdziwy, to nie znaczy to bynajmniej, aby przesłanki były prawdziwe. Może się właśnie okazać, że jedna z nich, albo obydwie, są fałszywe. Natomiast z fałszywości wniosku wynika fałszywość jednej lub obu przesłanek — o ile wniosek został wyciągnięty prawidłowo. Wniosek mógł jednak być wyciągniętym nieprawidłowo; wówczas on sam może być fałszywym, ale też może prawdziwym. W związku z tem rozróżniają często logicy prawdę formalną i prawdę materjalną. Jeżeli mianowicie wniosek został wyciągniętym poprawnie z przesłanek prawdziwych lub fałszywych, nazywa się formalnie prawdziwym; w przeciwnym przypadku formalnie fałszywym. Tak więc, zdanie

$$SAP,$$

jest formalnie prawdziwem, jako wniosek z przesłanek:

$$MAP$$
$$SAM$$

(Barbara), niezależnie od tego, czy są prawdziwe, czy fałszywe. Natomiast to samo zdanie, jako wniosek z przesłanek

$$PAM$$
$$SAM$$

(Tryb $(AA)_2$, nieważny) jest formalnie fałszywem. Niezależnie jednak od tego, zdanie $SAP$ samo w sobie, może być prawdziwem lub fałszywem: to jest materjalna prawda i fałsz. Rozróżnienie formalnej i materjalnej prawdziwości zdania prowadzi jednak do nieporozumień i jest, naszem zdaniem, niepotrzebnem. Zdanie bowiem musi być prawdą lub fałszem; inną jest rzeczą, że ono może wynikać lub nie wynikać z drugiego zdania.

To, że wniosek jest zdaniem (materjalnie) prawdziwem, nie wynika z naszego wywodu. Wywód nasz znaczy tylko to, że, jeżeli obydwie przesłanki są prawdziwe, to i wniosek jest zdaniem prawdziwem. Jeżeli zaś nie są obydwie przesłanki prawdziwe, to warunek nasz nie jest spełnionym, a zatem nie można twierdzić, iż

wniosek jest zdaniem prawdziwem. Ta okoliczność jednakże nie przeszkadza, aby zdanie, które otrzymaliśmy. było prawdziwem. Stosunki te zbadał już Arystoteles. Wobec ważności tych rzeczy, objaśnimy je na przykładzie. Wystarczy rozpatrzyć tryb Barbara; inne tryby dają się zbadać w ten sam sposób. Niech więc będzie

$$SAP.$$

Możemy ustawić syllogizm podług trybu Barbara:

$$\begin{array}{c} MAP \\ SAM \\ \hline SAP, \end{array}$$

dobierając przytem rozmaicie termin średni, $M$. Jeżeli za $M$ przyjmiemy:

jakieś $M_1$, zawarte w $P$, a zawierające w sobie $S$, to i przesłanki i wniosek, będą sprawdzone;

jakieś $M_2$, zawarte w $P$, ale nie mające nic wspólnego z $S$, to przesłanka większa będzie prawdziwą, mniejsza zaś — nie, ale pomimo to wniosek będzie prawdziwy;

jakieś $M_3$, zawierające w sobie oba terminy główne i różne od każdego z nich, to przesłanka mniejsza będzie prawdziwą, a większa fałszywą, ale wniosek będzie prawdziwy;

jakieś $M_4$, nie mające nic wspólnego z żadnym z terminów głównych, to przesłanki obie będą fałszywe, ale wniosek i wtedy będzie prawdziwym (zob. fig. 13).

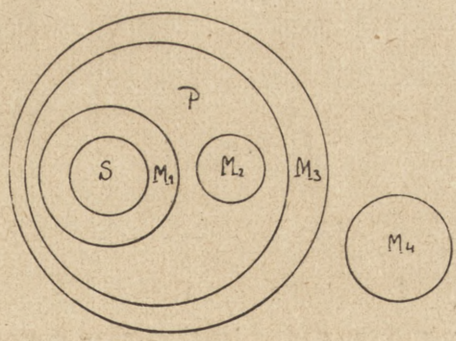



Fig. 13.

Aby mieć konkretny przykład na to, cośmy wyżej powiedzieli, uważajmy zdanie: „Każdy kwadrat jest figurą płaską“. Jak widać,

rolę $S$ odgrywa tu termin „kwadrat", rolę $P$ — „figura płaska"; mamy wówczas właśnie zdanie *SAP*. Za $M_1$ możemy przyjąć prostokąt, za $M_2$ — koło, za $M_3$ — twór geometryczny, za $M_4$ — kulę. Wniosek zawsze będzie prawdziwym, ale przesłanki tylko w pierwszym przypadku będą prawdziwe. W ten sposób objaśnia się wnioskowanie z przesłanek fałszywych. Poznajemy więc tę zasadniczą cechę, która odróżnia prawdę od fałszu. Z fałszu da się wyprowadzić i fałsz i prawda, z prawdy zaś tylko prawda wynika. Jest to właśnie charakterystycznem, że do prawdy i fałsz nawet prowadzić może, ale do fałszu tylko fałsz prowadzi.

Bezpośredniem i, można powiedzieć, pod względem łatwości i dokładności idealnem zastosowaniem syllogistyki jest sprawdzanie dowodów. Wychodzimy z założenia, iż rozumowanie składa się z syllogizmów. Potrzeba więc tylko sobie uprzytomnić, jak się sprawdza osobny syllogizm. Dane są więc przesłanki i wniosek. Liczymy najpierw przesłanki i przekonywujemy się, czy są istotnie w liczbie dwóch. Następnie liczymy terminy: mają być trzy. Jeden z nich powtarza się zatem dwa razy w przesłankach; pozostałe dwa mają wchodzić do wniosku. Możemy tedy, zestawiając przesłanki z wnioskiem, zobaczyć, jaki jest termin większy, jaki mniejszy i jaki średni. Na podstawie tego określamy, która przesłanka jest większą a która — mniejszą i nadajemy im porządek umówiony, pisząc mniejszą pod większą. Rozpoznajemy stąd figurę i tryb. Wspominając imiona trybów tej figury, widzimy, czy wniosek istnieje i, jeśli istnieje, to jaki mianowicie? Nareszcie porównywamy ten wniosek z danym wnioskiem. Jeżeli wniosek dany jest ten sam, lub wynika z niego przez podporządkowanie, to wnioskowanie jest prawidłowe; w przeciwnym przypadku jest błędne.

Tak więc sprawdza się syllogizm. A oto przykład. Przesłanki niech będą:

(1) Żaden trójkąt prostokątny nie jest figurą równoboczną.

(2) Każda figura foremna jest figurą równoboczną.

Wniosek: Żaden trójkąt prostokątny nie jest figurą foremną.

Czy wnioskowanie jest poprawne? Przesłanki są w liczbie dwóch a terminy są trzy: to więc jest w porządku. Z kształtu wniosku poznajemy również, że $S$ jest „trójkąt prostokątny", $P$ — „figura foremna", $M$ — wreszcie jest „figura równoboczna". Większa przesłanka jest (2), mniejsza (1). Trzeba więc przestawić przesłanki; pisząc je schematycznie, dostajemy:

*PAM*
*SEM.*

Jest to zatem figura II., tryb Camestres. Wniosek przeto jest:

*SEP*,

a więc istotnie: żaden trójkąt prostokątny nie jest figurą foremną. Rozumowanie było zatem prawidłowe.

Weźmy jeszcze jeden przykład. Niech przesłanki będą:

(1) Każda figura foremna jest równoboczną.

(2) Żaden trójkąt prostokątny nie jest figurą foremną.

Wniosek: Żaden trójkąt prostokątny nie jest figurą równoboczną.

Warunki wstępne są znowuż spełnione; *S* jest trójkąt prostokątny, *P* — figura równoboczna, *M* — figura foremna. Przesłanki zatem są:

*MAP*
*SEM*;

mamy więc tryb $(AE)_1$, nieważny. Zdanie rozważane jest więc zupełnie słuszne, ale z danych przesłanek nie wynika.

Drugie zagadnienie, jakie rozwiązuje syllogistyka, zagadnienie ściśle zresztą z powyższemi związane, jest następujące: Dane są dwie przesłanki; czy, względnie jaki, z nich wniosek wypływa? Z przesłanek rozpoznajemy termin średni *M*. Nie wiemy natomiast, który z terminów głównych ma być podmiotem, a który orzeczeniem wniosku. Jeżeli to nam jest dodatkowo wskazanem, wówczas zagadnienie staje się zapełnie określonem i postępujemy podobnie, jak przy sprawdzaniu gotowego syllogizmu, opuszczając jedynie końcowe porównywanie z danym wnioskiem, którego tu niema. Jeżeli zaś nie jest nam danem, który z terminów ma być podmiotem wniosku, to przyjmujemy z kolei raz jeden, drugi raz drugi z terminów głównych za podmiot i w każdym z tych przypadków postępujemy, jak wyżej.

Dla przykładu powróćmy do przesłanek ostatnio sprawdzanego syllogizmu. Oczywiście, jeżeli przyjąć *S* i *P* tak, jak w tym przykładzie, to wniosku niema. Niech więc teraz naodwrót, *S* będzie „figura równoboczna“ a *P* — „trójkąt prostokątny“. Trzeba tedy przestawić przesłanki; uczyniwszy to, dostajemy w postaci schematycznej:

*PEM*
*MAS*;

są to przesłanki trybu Fesapo figury IV. Wniosek jest *O*, t. j.: niektóre figury równoboczne nie są trójkątami prostokątnemi. Skądinąd wiemy więcej, ale z przesłanek wynika tylko tyle. Takiem jest drugie zastosowanie syllogistyki.

Zupełnie inny charakter ma trzecie zastosowanie syllogistyki: poszukiwanie dowodu. Tutaj danem jest twierdzenie, które chcemy otrzymać jako wniosek syllogistyczny; trzeba znaleźć przesłanki prawdziwe, z którychby ten wniosek wynikał. Jest to zadanie nadzwyczaj ważne. ale nieokreślone i bardzo trudne. Metoda rozwiązywania jego zależy od postaci zdania, które chcemy uzasadnić; my tutaj zajmiemy się jedynie dowodami zdań ogólnych, a więc

*SAP* i *SEP*.

Do dowodu pierwszego z tych zdań służyć może, jak wiemy, tylko tryb Barbara. Przy danem *S* i *P* trzeba znaleźć termin średni *M*, sprawdzający przesłanki tego trybu:

*MAP*
*SAM*.

Poszukiwanie tego terminu zawiera w sobie całą trudność poszukiwania dowodu. Jako wskazówkę ogólną do tego, można powiedzieć tylko to, że trzeba, jak się mówi, rozwijać treść *S*, t. j. wyliczać rozmaite własności podmiotu i rozwijać zakres *P*, t. j. wyliczać rozmaite pojęcia, posiadające własność orzeczenia, aż natrafimy w obydwu tych ciągach na jeden i ten sam termin *M*. Będzie to właśnie pożądany termin średni.

Niech n. p. chodzi o dowód twierdzenia takiego: „Każda liczba, której cyfra jednostek jest zerem, dzieli się przez 2“. Szukając terminu średniego. zobaczymy, iż za *M* może służyć n. p. termin: „liczba składająca się z jednego albo sumy kilku dziesiątków“, wówczas łatwo nam będzie ustawić potrzebny syllogizm.

W inny sposób przedstawia się naturalnie szukanie dowodu zdania postaci:

*SEP*.

Trybów, dających taki wniosek, jest cztery: Celarent figury I., Cesare i Camestres figury II. i Calemes figury IV. W rzeczywistości jednak są między nimi tylko dwa różne. Istotnie, dwa pierwsze mają tę samą przesłankę mniejszą, *SAM*; przesłanka większa wprawdzie w jednym jest *MEP*, a w drugim *PEM*, ale są to zdania ró-

wnoważne. Niema więc istotnej różnicy pomiędzy trybami Celarent i Cesare. Figura 14. uzmysławia nam powyższe tryby zapomocą

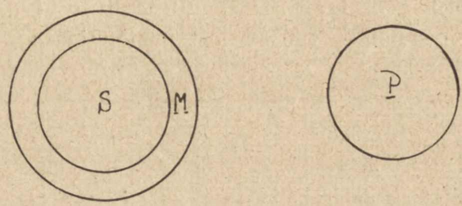



Fig. 14.

kół Eulera i podsuwa zarazem plan dowodu, opartego na jednym z tych trybów. Trzeba znaleźć takie *M*, któreby zawierało w sobie *S*, a wykluczało *P*. Jest to metoda odosobnienia podmiotu. Tak samo, jak między trybami Celarent i Cesare niema istotnej różnicy, niema jej także pomiędzy trybami Camestres i Calemes, o czem łatwo się przekonać, zestawiając ich przesłanki. Powyższe dwa tryby wyobraża fig. 15. Widać zarazem, jaką metodę należy stosować, by



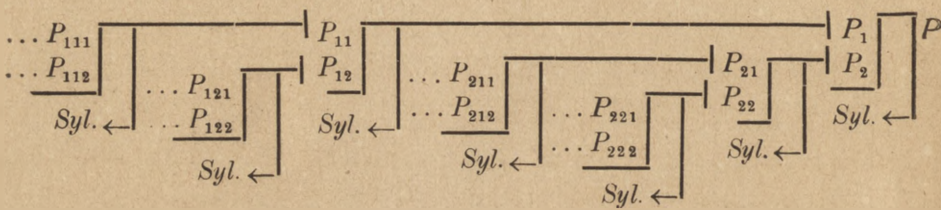

Fig. 15.

znaleźć dowód oparty na jednym z tych trybów. Trzeba znaleźć takie *M*, któreby zawierało w sobie *P* a wykluczało *S*. Jest to metoda odosobnienia orzeczenia.

Wobec braku miejsca, pominiemy metody dowodzenia zdań *I* i *O*, bardzo liczne a mające względnie mało zastosowania w matematyce.

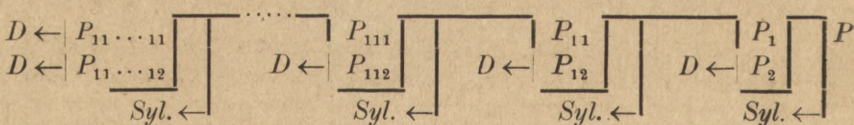
Syllogizm jest ogniwem w dowodzie; dowód syllogistyczny jest więc połączeniem syllogizmów. Takie połączenie syllogizmów nazywa się polisyllogizmem. Aby mieć pojęcie o polisyllogiźmie, wyobraźmy sobie, iż szukamy dowodu syllogistycznego jakiegoś zdania. Wiemy już, jak wygląda pierwszy krok takiego poszukiwania. Szuka się przesłanek, z którychby rozważane zdanie wynikało. Ale zdarzyć się może, iż nie znajdujemy takich przesłanek wśród

znanych nam twierdzeń. Możemy natrafić na przesłanki, z których zdanie rozważane wynika, nie wiedząc jednak o prawdziwości jednej z nich albo obydwóch. Szukamy tedy z kolei dla nich dowodu w podobny sposób. W ten sposób powstanie szerokie rozgałęzienie dowodu, którego schemat ogólny jest następujący:

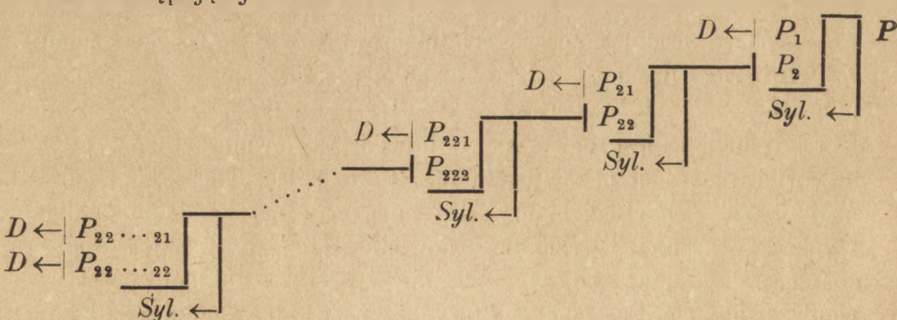



Litera $P$ oznacza tutaj zdanie, którego dowodzimy; ta sama litera, zaopatrzona we wskaźniki, wyobraża przesłanki dowodu. Widocznem jest prawo, podług którego tworzymy te wskaźniki.

Szczególnie zajmujące są prostsze przypadki polisyllogizmu, mianowicie te, w których w każdem ogniwie dowodu daną jest jedna z przesłanek, i to zawsze ta sama, a więc stale większa albo stale mniejsza. W pierwszym przypadku mamy polisyllogizm wsteczny, czyli regresywny, w drugim zaś — polisyllogizm postępowy czyli progresywny. Schemat polisyllogizmu postępowego jest taki:




Podobną metodą można przedstawić polisyllogizm wsteczny w postaci następującej:



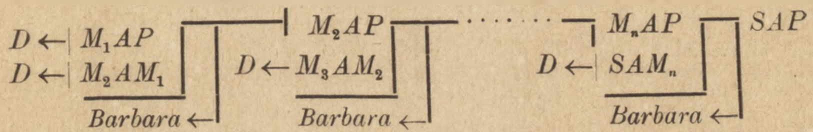
Weźmy najprostszy przypadek, kiedy wszystkie syllogizmy są Barbara. Chodzi o dowód zdania

$$SAP.$$

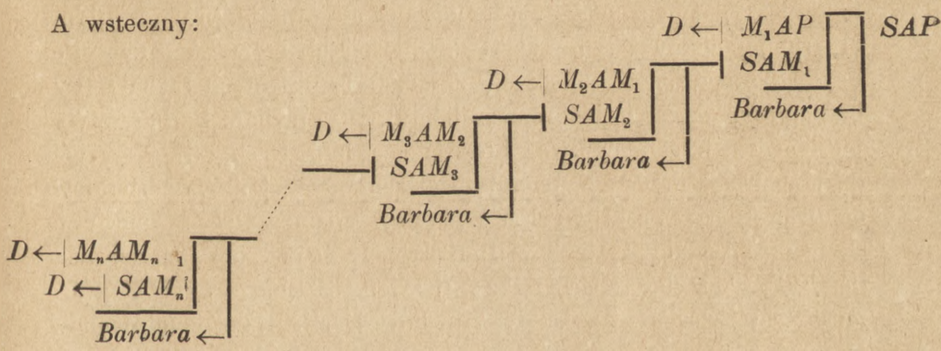
Oznaczamy terminy średnie, wprowadzane kolejno przez

$$M_2,\ M_2 \ldots,\ M_n$$

Polisylogizm postępowy będzie miał postać:




A wsteczny:




Rozumowanie, jakie w obu tych przypadkach ma miejsce uzmysławia fig. 16 Widzimy, iż przesłanki dane są te same w obu

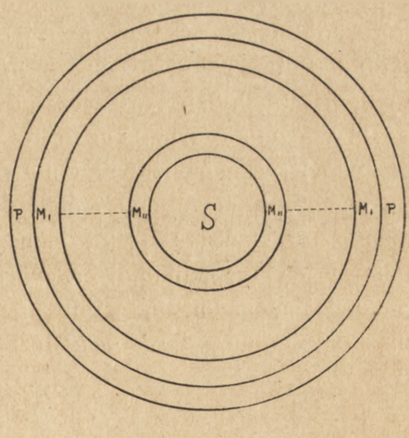



Fig. 16.

polisyllogizmach, tylko wykorzystywane w odwrotnym porządku. Mianowicie polisyllogizm postępowy posuwa się w kierunku zwiększającej się treści terminów, wsteczny — odwrotnie, t. zn., że w pierwszym idziemy od $P$, poprzez $M_1$, $M_2,\ldots$, $M_n$, do $S$, przyczem większe przesłanki wszystkie zawierają $P$. w drugim zaś idziemy od $S$ poprzez $M_n$, $M_{n-1},\ldots$, $M_1$, do $P$, przyczem mniejsze przesłanki wszystkie zawierają $S$.

Ale ogniwa polisyllogizmu nie muszą być wszystkie tworzone podług trybu Barbara. Powstaje więc pytanie, jakich trybów używać można, aby budować polisyllogizmy postępowe lub wsteczne? Możliwe formy zależą od figur, któremi się posługujemy; rozstrzyganie powyższego pytania w całej ogólności lub dla poszczególnych figur jest pożytecznem ćwiczeniem na stosowanie prawideł figur. My tutaj podamy tylko wyniki dla pierwszej figury. A zatem: Polisyllogizm postępowy może się składać: 1) z samych trybów Barbara (przypadek ten już rozważaliśmy); 2) z trybów Barbara z wyjątkiem ostatniego ogniwa, które może być Darii; 3) z samych trybów Celarent; 4) z trybów Celarent z wyjątkiem ostatniego ogniwa, które może być Ferio. Polisyllogizm wsteczny może się składać: 1) z samych trybów Barbara (przypadek ten już rozważaliśmy); 2) z trybów Barbara z wyjątkiem ostatniego ogniwa, które może być Celarent; 3) z samych trybów Darii; 4) z samych trybów Darii, z wyjątkiem ostatniego ogniwa, które może być Ferio

Jest rzeczą ciekawą, że, o ile w nauce, zwłaszcza w matematyce, syllogistyka znajduje bardzo mało zastosowań, gdyż mamy tam do czynienia prawie wyłącznie ze skomplikowanemi zdaniami warunkowemi, które nie dają się wyrazić zapomocą schematów Arystotelesa, a nadto, gdyby nawet można było sprowadzić całe rozumowanie do syllogistyki, byłaby to rzecz tak uciążliwa że nie opłacałaby się; o tyle w życiu codziennem dość często posługujemy się rozumowaniem syllogistycznem, jednakże nie w postaci zupełnej, którą właśnie poznaliśmy, a w pewnych skrótach. Zazwyczaj, w pojedynczym syllogiźmie, przytaczamy tylko jedną przesłankę, mianowicie tę, która nam się wydaje najmniej oczywistą. Tak skrócony syllogizm nazywa się entymematem. Mówimy n. p.: „Kwadrat jest figurą równoboczną, bo jest figurą foremną“. Jest to skrócony syllogizm następujący:

Każda figura foremna jest figurą równoboczną.
Każdy kwadrat jest figurą foremną.
---
Każdy kwadrat jest figurą równoboczną.

Jest to zatem tryb Barbara. Wyżej opuszczono przesłankę większą. Możnaby też opuścić przesłankę mniejszą a przytoczyć większą. Mielibyśmy tedy entymemat: „Każdy kwadrat jest figurą równoboczną, bo każda figura foremna jest równoboczną". A oto inny przykład. Przypuśćmy, że szukamy jakichś książek w szafie i powiadamy: „W tej szafie takich książek niema, bo tu są tylko podręczniki". Jest to entymemat Camestres; pełne rozumowanie wygląda tak:

Każda książka tej szafy jest podręcznikiem.
Żadna z poszukiwanych książek nie jest podręcznikiem.
---
Żadna z poszukiwanych książek nie jest książką tej szafy.

W podobny sposób skraca się polisyllogizmy. Tam przytacza się tylko przesłanki dane, opuszczając te, które dostajemy jako wnioski. Tak powstają łańcuszniki czyli soryty. Z polisyllogizmu wstecznego powstaje łańcusznik Arystotelesa: „Każde $S$ jest $M_n$, każde $M_n$ jest $M_{n-1}$, ..., każde $M_1$ jest $P$, zatem każde $S$ jest $P$", z postępowego zaś łańcusznik Gocleniusa: „Każde $M_1$ jest $P$, każde $M_2$ jest $M_1$, ..., każde $S$ jest $M_n$, zatem każde $S$ jest $P$".

W logice klasycznej, jak już wspominaliśmy, każdy z terminów używanych posiada pewien zakres, t. j. żadna z klas rozważanych nie jest pustą; w przypadkach zaś, kiedy rozważamy przeczenia klas danych, musimy także robić założenie, iż żadna z klas danych nie obejmuje całego świata mowy, gdyż w przeciwnym razie. przeczenie tej klasy byłoby znowuż klasą pustą. Jest to punkt widzenia zupełnie naturalny, jeśli jest mowa o klasie jako o zbiorze rzeczy, t. j. jeżeli traktujemy klasę z punktu widzenia zakresu. Jakiż to bowiem może być zbiór rzeczy, których niema? Inaczej przedstawia się sprawa z punktu widzenia treści. Uważajmy jakąś własność. t. j. funkcję logiczną; treść klasy, jej odpowiadającej, jest zupełnie określona. Inną zupełnie jest rzeczą pytanie. czy istnieją przedmioty, posiadające tę własność. Możemy n. p. się zapytać o liczbę całkowitą, większą od dwóch a mniejszą od trzech — albo o rzeczywisty pierwiastek równania:

$$x^2 + 1 = 0.$$

Wiadomo, że ani jednego ani drugiego niema. Jeżeli jednak weźmiemy jakieś zawiłe równanie, to i najbieglejszy algebraista nie powie odrazu, czy istnieje jego pierwiastek rzeczywisty. Zachodzi często potrzeba badania przedmiotu, o którym nie wiemy, czy w rzeczywistości istnieje. Jeżeli chcemy więc udowodnić, że jakieś równanie algebraiczne pierwiastka rzeczywistego nie posiada, to musimy go oznaczyć, rozważyć i doprowadzić do sprzeczności. Dla potrzeby zatem rozumowania nad rzeczą której niema, wprowadzamy klasę pustą. Powtarzamy, że, skoro klasa pusta nie ma osobników, nie ma ona i zakresu; natomiast posiada ona treść, tak samo, jak każda inna klasa.

Klasa pusta i pod innym względem posiada doniosłe znaczenie. Stanowi ona bardzo dogodne uogólnienie. Oto przykład: Niech $(S)$ i $(P)$ będą dwie klasy; można rozważać klasę $(Q)$ złożoną ze wspólnych osobników klas $(S)$ i $(P)$. Będziemy mieli różne twierdzenia o tej klasie. ale może ona być pustą. Gdybyśmy zatem nie uznawali klas pustych, trzebaby ciągle robić zastrzeżenia niepustości. Pojęcie klasy pustej pozwala nam zatem ujmować razem niektóre twierdzenia. Przekonamy się zresztą później, jak pożyteczną i ważną jest ona w logice matematycznej

Z tych powodów, na zakończenie wykładu logiki Arystotelesa, pragniemy rozstrzygnąć pytanie, w jaki sposób odbija się na niej wprowadzenie klas pustych Aby na to odpowiedzieć, musimy przedewszystkiem uzupełnić definicje zdań orzekających: $A$, $E$, $I$, $O$. Jest to bardzo ważne pytanie, pomijane jednak — rzecz dziwna — zazwyczaj w literaturze przedmiotu. Przypominamy, iż zdania podstawowe zdefinjowaliśmy na początku zapomocą ciągu logicznego. Ciąg logiczny zaś jest klasyfikacją zupełną stosunków, mogących zachodzić pomiędzy dwiema klasami, w założeniu, iż są one obie niepuste. Trzeba obecnie uzupełnić tę klasyfikację przez uwzględnienie przypadków, w których przynajmniej jedna z klas jest pustą. Jeżeli tedy jedna tylko z klas jest pustą, to może to być $(P)$ lub $(S)$; trzeci przypadek ma miejsce jeśli i $(S)$ i $(P)$ są puste. Przypadki te oznaczamy odpowiednio greckiemi literami:

$$\zeta,\ \eta,\ \theta.$$

Klasyfikację tę zestawić można w tabelce takiej:

| | $\zeta$ | $\eta$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|
| $(S)$ | niepuste | puste | puste |
| $(P)$ | puste | niepuste | puste |

Określamy teraz zdania podstawowe tak, by zachować stosunek sprzeczności. Zdanie *J* zachowa swe dawne znaczenie, ponieważ rozumiemy je zwykle tak: Istnieje takie *S*, które jest *P*, nie może więc żadna z tych klas być pustą. Natomiast zdanie *E* musi wówczas być rozszerzonem na wszystkie nowe przypadki. Zdanie *A*, tak, jak je zwykle rozumiemy, prawdziwem jest, jeśli podmiot jest klasą pustą; rozszerzamy je więc na przypadki $\eta$ i $\theta$. Dla zachowania więc stosunku sprzeczności, musimy uważać zdanie *O* za prawdziwe w przypadku $\zeta$. Obraz tego określenia zdań orzekających daje następująca tabelka:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | | *O* | | | | *A* | |
| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\varepsilon$ | $\zeta$ | $\eta$ | $\theta$ |
| *I* | | | | *E* | | | |

Przekonać się można, iż dla tak określonych zdań orzekających upadają wszystkie związki kwadratu logicznego — prócz sprzeczności. Łatwo się również przekonać, że z wniosków przez przekształcenie, conversio simplex zachowuje się bez zmian. W rzeczy samej, dla zdań *I* zachowuje się, ponieważ mają one to samo znaczenie co dawniej, dla *E* zaś, ponieważ jest to przeczenie *I*. Natomiast conversio per accidens upada, ponieważ jeśli *S* jest klasą pustą, to prawdą jest zawsze *SAP*, nieprawdą natomiast *PIS*. Można wreszcie przekonać się, iż obrócenie (obversio) zachowuje się bez zmian.

Możemy teraz zająć się samą syllogistyką: Otóż Mac Coll zauważył, że zmiana polega na odpadnięciu czterech trybów, mianowicie tych, które zawierają literę *p*, a więc: Darapti i Felapton figury III, tudzież Bamalip i Fesapo figury II. Jest to zrozumiałem, ponieważ są one uzasadniane przez conversio per accidens. Uzasadnimy najpierw ważność pozostałych trybów, następnie zaś obalimy wspomniane cztery tryby. Zwracając się do figury I., mianowicie do trybu Barbara, zauważmy, iż, jeśli *S* jest niepuste, to i pozostałe dwa terminy muszą być niepuste, gdy tylko przesłanki są sprawdzone; mamy więc wówczas klasyczny przypadek, w którym syllogizm zawieść nas nie może. Jeżeli zaś *S* jest puste, to wniosek jest zdaniem prawdziwem bez względu na przesłanki. W obu więc przypadkach tryb jest ważny. Podobnie tryb Celarent. Jeśli oba terminy główne są niepuste, to z przesłanek wynika, iż termin

średni pustym być nie może; mamy więc klasyczny przypadek. Jeśli zaś jeden lub oba terminy główne są puste, to wniosek jest zdaniem prawdziwem. W obu więc przypadkach tryb jest ważny. W trybie Darii przesłanka mniejsza wskazuje, iż *S* i *M* są niepuste, ale wówczas, ze względu na przesłankę większą, również *P* pustem być nie może. Tryb Darii dopuszcza zatem tylko klasyczny przypadek. W trybie Ferio, z tych samych racji, jeśli tylko przesłanki są urzeczywistnione, *S* i *M* muszą być niepuste. Wówczas, jeśli *P* jest niepuste — mamy klasyczny przypadek, natomiast jeśli *P* jest puste a *S* nie, to wniosek *O* zachodzi bez względu na przesłanki. Tryby figury I. utrzymują się zatem w całości. Tryby zaś pozostałych figur, prócz tych czterech, które wymieniliśmy, sprowadzają się do nich za pomocą conversio simplex, zastosowania stosunku sprzeczności i reductio ad absurdum. Ponieważ te trzy sposoby wnioskowania ważne są i dla klas pustych, widzimy, iż rozważane tryby pozostają i nadal ważnemi.

Tryby, których imiona zawierają literę *p*, łatwo jest obalić przez zastosowanie cechy nieważności trybów. W rzeczy samej, przesłanki tych trybów są wszystkie ogólne, natomiast wnioski są szczegółowe. Jeśli zatem wszystkie terminy, jakie do nich wchodzą, przedstawiają klasy puste, to przesłanki są zdaniami prawdziwemi a wniosek jest zdaniem fałszywem. Mamy zatem wogóle prawidło takie, że dwie przesłanki ogólne wniosku szczegółowego dać nie mogą. W ten sposób odpadają również wszystkie konkluzje osłabione klasycznej logiki.

## ROZDZIAŁ IX.

# Wstęp do logiki matematycznej.

Wspominaliśmy już o tem, że elementem, do którego myślenie sprowadza się w nauce, a przedewszystkiem w matematyce, jest zdanie warunkowe. Z pojęciem tem mieliśmy już do czynienia, lecz, zanim dalej pójdziemy, musimy dokładniej je zgłębić. Jest rzeczą uderzającą, iż w większości współczesnych książek o logice jest ono bardzo niejasno określane. Tymczasem już stoicy, jak się zdaje, wniknęli dość głęboko w te rzeczy.

Aby sobie zdać sprawę z istoty tego pojęcia, zapoznać się musimy bliżej z pojęciem wynikania. Jest to stosunek pomiędzy dwiema funcjami logicznemi. Powiadamy n. p., że pomiędzy funkcjami logicznemi:

$$x = y \text{ i } 2x = 2y$$

zachodzi związek wynikania:

$$x = y \,.\supset.\, 2x = 2y.$$

Arytmetycznie, jest to całkiem zrozumiałe. Znaczy to, że, jeżeli do obu tych funkcyj za $x$ i $y$ wstawimy jakieś liczby, $a$ i $b$, takie, aby zdanie, w które zamieni się funkcja po lewej stronie, było prawdziwem, to zdanie, w które się zamieni funkcja po prawej stronie, również będzie prawdziwem. Chodzi więc o to, że wykluczonym jest przypadek, w którymby poprzednik zamienił się w zdanie prawdziwe, a następnik w zdanie fałszywe.

Możemy to ogólnie sformułować. jak następuje: Jeżeli mamy dwie funkcje propozycjonalne, do których na miejsce zmiennych wstawiamy rozmaite terminy, zamieniające te funkcje w zdania, to przy każdem podstawieniu, zachodzić musi jeden z przypadków następujących:

1. 1-sza funkcja zamienia się w zdanie prawdziwe, 2-ga — w prawdziwe
2. „ „ „ „ „ „ fałszywe, „ — „
3. „ „ „ „ „ „ „ „ — w fałszywe
4. „ „ „ „ „ „ prawdziwe, „ — „

Otóż, jeśli powiadamy, iż z pierwszej funkcji wynika druga, to odrzucamy ten ostatni przypadek, t. j. twierdzimy, iż jest on wykluczonym.

Możemy jednak uważać stosunki nie funkcyj logicznych, a zdań. Jeżeli $p$ i $q$ są dwa zdania, to możliwe są podobne cztery przypadki; przedstawia je tabelka następująca:

| | $p$ | $q$ |
|---|---|---|
| 1. | + | + |
| 2. | — | + |
| 3. | — | — |
| 4. | + | — |

Oznaczamy tutaj, jak zwykle, znakiem + prawdę, znakiem — fałsz. Analogicznie tedy do wynikania dla funkcyj logicznych, da się określić wynikanie dla zdań. Powiadamy więc, że z „$p$ wynika $q$“,

$$p \supset q,$$

jeśli zachodzi jeden z przypadków 1., 2., 3., a więc nie zachodzi przypadek 4.

Wynikanie funkcyj logicznych sprowadza się do wynikania zdań, albowiem, twierdząc, iż z jednej funkcji logicznej wynika druga, wyrażamy myśl, że, jeśli do tych funkcyj podstawimy jakieś terminy, zamieniające je w zdania, to pomiędzy odpowiedniemi zdaniami zachodzić będzie związek wynikania. Wynikanie zdań jest więc bardziej elementarnem pojęciem od wynikania funkcyj. Pomimo to, dla oznaczenia obu rodzajów wynikania, używamy tego samego Peanowskiego znaku $\supset$. Ale nie trzeba tych pojęć mieszać; Russell odróżnia wynikanie materjalne — dla zdań, od wynikania formalnego — dla funkcyj logicznych.

Wynikanie materjalne występuje jedynie w logistyce. Dla tego, który po raz pierwszy z niem się styka, wydaje się ono dziwacznem. Jest bowiem bardzo wielki rozdźwięk między znaczeniem wynikania w mowie potocznej a wynikaniem materjalnem. Wynikanie materjalne cechuje to, że ze zdania fałszywego wynika każde zdanie. Prawdą jest n. p.:

$2 + 2 = 5 . \supset . 2 \times 3 = 10$, jak również: $2 + 2 = 5 . \supset . 2 \times 3 = 6.$

Z drugiej strony, prawda wynika ze wszystkiego. Prawdą jest więc: $2+3=6 . \supset . 2+2=4$, jak również: $2 \times 3=6 . \supset . 2+2=4$. Jak widzimy, wynikanie materjalne jest związkiem bardzo luźnym, t. j. obejmującym nader wiele przypadków. Jest to jednak związek nadzwyczaj ważny. Służy on do określenia wynikania formalnego; ale jest coś bez porównania ważniejszego: na pojęciu tem opiera się cała teorja zdań czyli teorja dedukcji.

Z teorji dedukcji korzysta się niejawnie, t. j. intuicyjnie, w każdym właściwie dowodzie; dowód zaś zupełny bez niej jest niemożliwym. Posiada ona zatem dla nas pierwszorzędne znaczenie. Z tego powodu, jakkolwiek ostateczny jej wykład odkładamy na sam koniec niemal niniejszego dzieła, musimy tutaj, aby móc się dalej posuwać, dać o niej pewne pojęcie.

Pojęcia teorji dedukcji są następujące:

1. Przeczenie zdania (w symbolice Russell'a i Whitehead'a):

$$\sim p,$$

2. Alternatywa dwóch zdań,

$$p \vee q,$$

którą dawniej zapisywano:

$$p+q.$$

3. Układ dwóch zdań,

$$p \cdot q.$$

4. Wynikanie,

$$p \supset q.$$

5. Równoważność,

$$p \equiv q.$$

Pojęcia te są bardzo subtelne i mało wyjaśnione; w „Principia mathematica" pokazano, jak można jedne z tych pojęć definjować w zależności od drugich. My się tem narazie zajmować nie będziemy, podamy jedynie warunki, w których każde z powyższych zdań jest prawdą. Weźmy więc najpierw pierwsze z powyższych pojęć, przeczenie; mamy tu do czynienia z jednem zdaniem, które może być prawdą lub fałszem. Dwa przypadki są więc możliwe: $p$ jest prawdą lub fałszem. W obu tych przypadkach o prawdziwości lub fałszywości zdania $\sim p$ poucza nas poniższa tabelka, gdzie znowuż znak $+$ wyraża prawdę a $-$ fałsz:

| $p$ | $\sim p$ |
|---|---|
| + | — |
| — | + |

Jeżeli zatem prawdą jest $p$, to fałszem jest $\sim p$ i naodwrót. Do alternatywy, układu, wynikania i równoważności wchodzą po dwa zdania; tu więc musimy rozróżniać cztery przypadki. Dla powyższych pojęć mamy tedy następującą tabelkę:

| $p, q$ | $p \vee q$ | $p \cdot q$ | $p \supset q$ | $p \equiv q$ |
|---|---|---|---|---|
| + + | + | + | + | + |
| + — | + | — | — | — |
| — + | + | — | + | — |
| — — | — | — | + | + |

Tabelka tego rodzaju służyć może do dowodu lub obalenia każdego twierdzenia z teorji zdań. Wystarczy zatem uwzględnić wszystkie możliwe przypadki odnośnie do prawdziwości lub fałszywości poszczególnych zdań, wchodzących do badanego twierdzenia i w każdym z nich zosobna stwierdzić, czy to twierdzenie się sprawdza. Jeżeli we wszystkich przypadkach twierdzenie się sprawdza, to jest ono zdaniem prawdziwem; jeżeli zaś choć w jednym przypadku twierdzenie zawodzi, to jest ono zdaniem fałszywem. Na tabelce wyrazi się to tem, że w pierwszej ewentualności, w kolumnie, odpowiadającej badanemu twierdzeniu, będziemy mieli tylko znaki +; wówczas twierdzenie jest prawdziwem. W drugiej ewentualności, w kolumnie ostatniej, t. j. odpowiadającej temu twierdzeniu, będziemy mieli przynajmniej w jednem miejscu znak —; twierdzenie tedy nie będzie ogólnie prawdziwem. Prawdziwość zaś i fałszywość twierdzenia, które zazwyczaj będzie wyrażeniem dość złożonem, w każdym przypadku zosobna określamy, opierając się na danych zawartych w wyżej przytoczonej tabelce. W tabelce, utworzonej dla zbadania prawdziwości jakiegoś twierdzenia, będą kolumny pomocnicze, określające w każdym wypadku zosobna prawdziwość i fałszywość członów, wchodzących w skład twierdzenia. Dla przykładu, weźmy następujące, bardzo charakterystyczne twierdzenie:

$$\sim (p \supset q) \cdot \supset \cdot q \supset p.$$

Odnośna tabelka będzie następująca:

| $p, q$ | $p \supset q$ | $\sim(p \supset q)$ | $q \supset p$ | $\sim(p \supset q) \cdot \supset \cdot q \supset p$ |
|---|---|---|---|---|
| + + | + | — | + | + |
| + — | — | + | + | + |
| — + | + | — | — | + |
| — — | + | — | + | + |

Twierdzenie zatem we wszystkich przypadkach się sprawdza. Okazuje się więc, że z dwóch zdań, zawsze przynajmniej jedno z drugiego wynika. Jest to jedna z tych zadziwiających własności, które posiada wynikanie materjalne.

A oto drugi przykład. Zbadajmy twierdzenie:

$$p \cdot \supset \cdot p \supset q$$

Odnośna tabelka będzie następująca:

| $p, q$ | $p \supset q$ | $p \cdot \supset \cdot p \supset q$ |
|---|---|---|
| + + | + | + |
| + — | — | — |
| — + | + | + |
| — — | + | + |

Widzimy, iż w ostatniej kolumnie nie wszędzie figuruje znak +; twierdzenie jest zatem fałszywe.

Oto zatem nasza metoda! Mamy więc do czynienia z osobliwą teorją, istnieje w niej bowiem możność sprawdzania każdego twierdzenia sposobem zupełnie mechanicznym. Jest to związane ściśle z maszyną logiczną Jevons'a, którą się później zajmiemy. Same te tabelki, któremi się posługiwaliśmy, wprowadził pierwszy E. Schröder, najpierw w kilkutomowym podręczniku algebry logiki, następnie zaś w krótkiej broszurce, w której tenże przedmiot jest zwięźle opracowany i którą po śmierci jego wydał Müller. Dla ścisłości dodać trzeba, iż Schröder, zamiast używania znaków + i —, przypisywał zdaniom prawdziwym wartość *1* a fałszywym *0* i na tej podstawie obliczał wartość każdego wyrażenia, która zawsze wypadała *1* lub *0*. Oczywiście jednak, różnica ta nie jest istotną. Rzecz ciekawa, iż Schröder prawdopodobnie — jak to się często odkrywcom zdarza — nie zdawał sobie sprawy z doniosłości swego od-

krycia, gdyż tabelkę swoją podaje jako jeden ze sposobów dowodzenia twierdzeń, tak jednak, że można jej nie zauważyć.

Zapomocą tabelki Schröder'a, każdy będzie mógł z łatwością sprawdzić twierdzenia następujące:

1. $p \supset q \cdot q \supset p \cdot \equiv . p \equiv q$
2. $\sim p \vee q \cdot \equiv . p \supset q$
3. $p \supset q \cdot \equiv . \sim q \supset \sim p$
4. $\sim (p \cdot q) \cdot \equiv . \sim p \vee \sim q$
5. $\sim (p \vee q) . \equiv . \sim p . \sim q$
6. $\sim (p \supset \sim q) \cdot \equiv . p \cdot q$
7. $p \supset q \cdot \equiv : q \equiv . p \vee q$
8. $p \supset q \cdot \supset r : \equiv . p \cdot q \cdot \supset . r$
9. $p \supset q \cdot p \supset r : \equiv : p . \supset . q \cdot r$
10. $p \supset q . r \supset s \supset : p . r . \supset . q . s$
11. $p \supset q . r \supset s . \supset : p \vee r . \vee . q \vee s$
12. $p \supset q \cdot q \supset r . \supset . p \supset r$

Pierwsze z tych twierdzeń okazuje, iż równoważność można uważać za wzajemne wynikanie dwóch zdań, drugie Russell i Whitehead biorą za definicję wynikania. Trzecie stanowi t. zw. kontrapozycję. Czwarte twierdzenie i piąte wyrażają znakomite prawidła de Morgan'a o przeczeniu układu i alternatywy. Szóste zdanie służyć może za definicję układu przy pomocy wynikania. Siódme wykazuje, iż wynikanie zastąpić można przez równoważność. Ósme znane jest pod nazwą twierdzenia o wniesieniu i wyniesieniu. Dziewiąte twierdzenie jest jednem z najważniejszych w teorji dowodu. Od dziesiątego począwszy, twierdzenia nasze mówią tylko o wynikaniu; niema już równoważności. Z twierdzeń 10. i 11. wynika, iż wynikanie można mnożyć i dodawać stronami, jak zwykle mówią logicy; trzeba bowiem wiedzieć, że układ dwóch zdań nazywa się często ich iloczynem, a alternatywa — sumą (dlatego dawniej oznaczano tę ostatnią znakiem $p + q$). Ostatnie twierdzenie stanowi t. zw. syllogizm.

Powracamy obecnie do funkcyj logicznych; funkcje te oznaczają logicy włoscy literami:

$$p_x, q_x, \text{ i t. d.}$$

Mogą to być funkcje niekoniecznie jednej, ale kilku zmiennych; wówczas wskaźnik $x$ będzie oznaczał cały układ tych zmiennych.

Jeżeli za te zmienne podstawimy jakieś określone wartości, to uzyskamy zdania. To jest zatem sposób otrzymywania zdań z funkcyj logicznych. Ale są i inne sposoby. Jeżeli bowiem chcemy wyrazić, że, przy każdem podstawieniu za $x$ określonych wartości, funkcja $p_x$ zamienia się w zdanie prawdziwe, to podług symboliki Russell'a i Whitehead'a, piszemy

$$(x)\ (p_x),$$

„dla każdego $x$ zachodzi $p_x$". Tak n. p. możemy napisać

$$(x)\ (x = x),$$

„dla każdego $x$ zachodzi $x = x$". Jest to zdanie ogólne; podkreślamy, zdanie, a nie funkcja. Zdanie to jest przytem prawdziwem. Natomiast

$$(x)\ (x \neq x)$$

jest wprawdzie także zdaniem ogólnem, ale zdaniem fałszywem. W zdaniach tych niema już zmiennych w ścisłem tego słowa znaczeniu; zmienne zamieniły się w zmienne pozorne. Pojęcie zmiennej pozornej w logice jest zupełnie analogicznem do pojęcia zmiennej pozornej w matematyce.

Możemy również chcieć wyrazić myśl, że jakaś funkcja $p_x$, zamienia się, przy pewnych wartościach zmiennej, w zdanie prawdziwe; zapisujemy to jak następuje:

$$(\exists\, x)\ (p_x)$$

„istnieje $x$ takie, że zachodzi $p_x$". Jest to znowuż zdanie, zawierające zmienną pozorną. Tak n. p. z funkcji:

$$x^2 = 1$$

utworzyć możemy zdanie:

$$(\exists\, x)\ (x^2 = 1);$$

jest to zdanie prawdziwe. Natomiast fałszywem jest zdanie:

$$(\exists\, x)\ (x \neq x)$$

Niech teraz będą dwie funkcje logiczne

$$p_x \text{ i } q_x$$

jeżeli napiszemy:

$$p_x \supset q_x,$$

to będzie to znowu funkcja, do której, na miejsce zmiennej, wstawiać możemy rozmaite stałe, otrzymując zdania, wyrażające wyni-

kanie materjalne. Ale zdarzyć się może, iż wszystkie te zdania będą prawdziwe. Myśl tę, w symbolice Russell'a i Whitehead'a, zapiszemy jak następuje:

$$(x)\ (p_x \supset q_x),$$

„dla każdego $x$, z $p_x$ wynika $q_x$"; jest to wynikanie formalne. Peano zapisuje je krócej:

$$p_x \supset_x q_x.$$

My zaś, narazie, użyjemy jeszcze prostszej symboliki, mianowicie, będziemy funkcje logiczne oznaczali dużemi literami alfabetu greckiego, jak

$$\Sigma,\ \Pi,\ P \text{ i t. d.}$$

Nie będziemy zatem ujawniali zmiennych. Symbol zdania warunkowego, t. j. wynikania formalnego, będzie następujący:

$$\Sigma \supset \Pi.$$

Opuszczamy tutaj znak ogólności, jako sam przez się zrozumiały.

Dla przykładu weźmy zdanie:

$$x \text{ dzieli się przez } 4 . \supset_x . x \text{ dzieli się przez } 2.$$

Jest to zdanie prawdziwe, jeżeli bowiem zwrócimy się do tabelki, umieszczonej na początku niniejszego rozdziału, która służy do objaśnienia znaczenia wynikania formalnego, to zobaczymy, iż wykluczonym jest przypadek 4-ty. Wszystkie inne przypadki są zato możliwe. Istotnie, jeżeli za $x$ podstawimy liczbę *4*, to otrzymamy przypadek 1-szy, jeżeli *3*, to otrzymamy przypadek 2-gi, jeżeli zaś *2* — to otrzymamy przypadek 3-ci. Zdanie natomiast:

$$x \text{ dzieli się przez } 3 . \supset_x . x \text{ dzieli się przez } 2$$

jest fałszywem, gdyż zdarzyć się może przypadek 4-ty. Inne przypadki wprawdzie również są możliwe, ale nie to jest charakterystycznem; charakterystycznem jest to, że zachodzić może 4-ty przypadek.

Jak wiemy, zdanie warunkowe składa się z dwóch części; n. p. w zdaniu

$$\Sigma \supset \Pi,$$

częściami temi są $\Sigma$ i $\Pi$, przyczem $\Sigma$ nazywamy poprzednikiem, a $\Pi$ następnikiem zdania warunkowego. Niekiedy też funkcję $\Sigma$ nazywa

się hypotezą a $\Pi$ tezą. Najciekawszą jest jednak nazwa, jakiej używają matematycy. Oba człony zdania warunkowego zowią się warunkami; poprzednik jest warunkiem dostatecznym, następnik zaś — koniecznym. Jeżeli prócz zdania

$$\Sigma \supset \Pi,$$

zachodzi też zdanie odwrotne,

$$\Pi \supset \Sigma,$$

to oba warunki są konieczne i dostateczne. Weźmy n. p. zdanie warunkowe:

$$x \text{ dzieli się przez } 2 \,.\, y \text{ dzieli się przez } 2 \,.\supset.\, x + y \text{ dzieli się przez } 2.$$

Można to też wyrazić jak następuje: Podzielność (przez 2) składników pociąga za sobą podzielność (przez 2) sumy. Zdanie odwrotne nie jest prawdziwem. Podzielność sumy nie pociąga za sobą podzielności składników. Podzielność składników jest zatem warunkiem dostatecznym, ale nie koniecznym, podzielności sumy, podzielność zaś sumy jest warunkiem koniecznym, ale bynajmniej nie dostatecznym, podzielności składników. Terminologja taka, aczkolwiek niematematykowi nieco dziwną wydać się może, w praktyce jest nadzwyczaj dogodną.

Wynikanie formalne posiada wiele własności wynikania materjalnego, ale nie posiada ich wszystkich. W teorji dedukcji n. p. poznaliśmy twierdzenie następujące:

$$\sim (p \supset q) \,.\supset.\, q \supset p.$$

Łatwo sprawdzić, że dla wynikania formalnego niema analogicznego twierdzenia:

$$\sim (\Sigma \supset \Pi) \,.\supset.\, \Pi \supset \Sigma.$$

Istotnie, weźmy n. p. za $\Sigma$ funkcję „$x$ dzieli się przez 3“, a za $\Pi$ — „$x$ dzieli się przez 2“. Fałszem jest tedy

$$\Sigma \supset \Pi,$$

a więc prawdą jest

$$\sim (\Sigma \supset \Pi),$$

natomiast również fałszem jest

$$\Pi \supset \Sigma;$$

mamy więc przypadek 4. naszej tabelki. Własność, o którą chodzi,

będą dopiero posiadały zdania, które otrzymamy z powyższych funkcyj przez zastąpienie zmiennej $x$ jakąkolwiek stałą liczbą całkowitą.

Wspominaliśmy już parokrotnie o odwracaniu zdań warunkowych; chcemy teraz nieco bliżej się tem zająć. Mając tedy dwie funkcje logiczne, $\Sigma$ i $\Pi$, możemy z nich utworzyć następujące cztery zdania warunkowe:

1. $\Sigma \supset \Pi$,
2. $\Pi \supset \Sigma$,
3. $\sim\Sigma \supset \sim\Pi$,
4. $\sim\Pi \supset \sim\Sigma$.

Jak wiemy, gdy chodziło o wynikanie materjalne, zdania podobne do zdań 1. i 4. były równoważne; czy podobna własność istnieje dla wynikania formalnego? Przekonamy się, że tak jest istotnie. Najpierw jednak wyjaśnić musimy dokładniej pojęcie przeczenia funkcji.

Niech więc będzie jakakolwiek funkcja logiczna, $\Sigma$; istnieje tedy funkcja logiczna, będąca jej przeczeniem,

$$\sim\Sigma.$$

Przy tych wartościach zmiennych, przy których pierwsza z tych funkcyj zamienia się w zdanie prawdziwe, druga zamienia się w zdanie fałszywe i naodwrót. Łatwo stwierdzić, że jest:

$$\sim(\sim\Sigma) \equiv \Sigma,$$

t. j. że te funkcje razem stają się prawdą i razem stają się fałszem. Istotnie, zdanie, w które przy dowolnych wartościach zmiennych zamienia się $\sim\Sigma$ jest przeczeniem zdania, w które zamienia się $\Sigma$ przy tych samych wartościach zmiennych, zdanie zaś, w które zamienia się $\sim(\sim\Sigma)$ jest przeczeniem zdania, w które zamienia się $\sim\Sigma$, a więc przeczeniem przeczenia zdania, w które zamienia się $\Sigma$, ale zdania te są równoważne, t. j. razem prawdziwe albo razem fałszywe. Mamy więc, podobnie, jak dla zdań, prawo podwójnego przeczenia dla funkcyj.

Powracamy teraz do sprawy odwracania zdań warunkowych. Aby tedy uzasadnić równoważność zdań 1. i 4., zwróćmy uwagę na przypadki, w których powyższe zdania są fałszywe. Otóż pierwsze z nich jest fałszywem wtedy i tylko wtedy, gdy przy pewnych

wartościach zmiennych, $\Sigma$ staje się prawdą, a $\Pi$ — fałszem; zdanie zaś 4. jest fałszywem wtedy i tylko wtedy, gdy, przy pewnych wartościach zmiennych, $\sim \Pi$ staje się prawdą a $\sim \Sigma$ — fałszem. Ale są to te same przypadki; zdania 1. i 4. są więc razem fałszywe i razem prawdziwe. Wobec tego mamy kontrapozycję także dla funkcyj logicznych:

$$\Sigma \supset \Pi . \equiv . \sim \Pi \supset \sim \Sigma$$

Podobnie, jak zdania 1. i 4., równoważne są także zdania 2. i 3., różniące się zresztą od nich tylko oznaczeniami. Tylko dwa zatem z naszych czterech zdań są niezależne. Jest to rzecz bardzo ważna. Istotnie, układ zdań 1. i 2. wyraża równoważność funkcyj $\Sigma$ i $\Pi$. Ale, ze względu na powyższe związki, aby udowodnić tę równoważność, wystarcza udowodnić którekolwiek dwa zdania niezależne z pośród naszych czterech. Cztery są zatem możliwe kombinacje:

zdanie 1. i 2., t. j. $\Sigma \supset \Pi$ i $\Pi \supset \Sigma$,
„ 1. i 3., t. j. $\Sigma \supset \Pi$ i $\sim \Sigma \supset \sim \Pi$,
„ 2. i 4., t. j. $\Pi \supset \Sigma$ i $\sim \Pi \supset \sim \Sigma$,
„ 3. i 4., t. j. $\sim \Sigma \supset \sim \Pi$ i $\sim \Pi \supset \sim \Sigma$.

Mamy więc cztery metody dowodu równoważności dwóch funkcyj; w praktyce wybieramy oczywiście tę, która w danym razie jest najdogodniejszą.

Dla przykładu udowodnimy, iż warunkiem koniecznym i dostatecznym parzystości kwadratu liczby całkowitej jest parzystość samej tej liczby. Chodzi więc o równoważność taką:

$$x \text{ parzyste} \;.\equiv_x.\; x^2 \text{ parzyste}.$$

Nasze cztery zdania będą tedy następujące:

1. $x$ parzyste $.\supset_x.$ $x^2$ parzyste,
2. $x^2$ parzyste $.\supset_x.$ $x$ parzyste,
3. $x$ nieparzyste $.\supset_x.$ $x^2$ nieparzyste,
4. $x^2$ nieparzyste $.\supset_x.$ $x$ nieparzyste.

Dla dowodu wybierzemy zdania 1. i 3. Zdania 1. dowodzi się bardzo prosto. Istotnie, niech $x$ przybierze jakąkolwiek stałą, ale dowolną wartość, $a$; wówczas

$$a^2 = a \,.\, a.$$

Jeżeli tedy $a$ jest parzyste, to oba czynniki powyższego iloczynu

są parzyste, a zatem i iloczyn jest parzysty; ale to jest właśnie $a^2$. Dla dowodu zdania 3., załóżmy, iż $x$ przybrało jakąkolwiek wartość nieparzystą, $a$. Istnieje takie $n$, że jest

$$a = 2n + 1,$$

gdzie $n$ jest liczbą całkowitą. Wówczas jest:

$$a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1.$$

Jeżeli tedy przyjmiemy:

$$m = 2n^2 + 2n,$$

to $m$ będzie liczbą całkowitą, spełniającą związek:

$$a^2 = 2m + 1.$$

W takim razie jednak $a^2$ jest liczbą nieparzystą, c. b. d. o.

Kontrapozycja odgrywa wielką rolę we wszelkiem dowodzeniu matematycznem. Również bardzo ważnem twierdzeniem jest ściśle z nią związana t. zw. kontrapozycja uogólniona, wyrażająca się wzorem następującym:

$$\Sigma . \Pi \supset . P : \equiv : \Sigma . \sim P . \supset . \sim \Pi.$$

Różne są sposoby udowodnienia tego; my to uczynimy zapomocą twierdzenia o wniesieniu i wyniesieniu dla funkcyj logicznych, analogicznego do twierdzenia o tejże nazwie — w teorji dedukcji:

$$\Sigma . \Pi . \supset . P : \equiv : \Sigma . \supset . \Pi \supset P.$$

Dla uniknięcia nieporozumień, zaznaczyć należy, iż symbol

$$\Pi \supset P$$

w następniku prawej części powyższej równoważności nie oznacza zdania (wynikania formalnego), lecz funkcję logiczną, powstającą, jako wyrażenie złożone z funkcji $\Pi$ i $P$. O prawdziwości powyższego twierdzenia można się przekonać, rozważając przypadki, w których obie strony równoważności są zdaniami fałszywemi. Otóż lewa strona jest fałszywą, jeśli istnieje układ wartości na zmienne, przy którym prawdą się staje $\Sigma . \Pi$, a więc $\Sigma$ i $\Pi$, a fałszem się staje $P$; prawa strona jest fałszywą jeśli istnieje układ wartości na zmienne, przy którym prawdą się staje $\Sigma$, zaś $\Pi \supset P$ staje się fałszem. Ale $\Pi \supset P$ staje się fałszem wtedy i tylko wtedy, gdy $\Pi$ staje się prawdą a $P$ — fałszem; oba przypadki są więc te same, a zatem równoważność rzeczywiście ma miejsce.

Mając to przekształcenie, możemy z łatwością uzasadnić kontrapozycję uogólnioną. W rzeczy samej, możemy lewą stronę zastąpić przez zdanie

$$\Sigma \supset . \Pi \supset P,$$

równoważne jej. Ale do następnika możemy zastosować zwykłą kontrapozycję, t. j. zastąpić

$$\Pi \supset P$$

przez

$$\sim P \supset \sim \Pi;$$

otrzymamy tedy:

$$\Sigma . \supset . \sim P \supset \sim \Pi .$$

Ale to jest równoważne

$$\Sigma . \sim P . \supset . \sim \Pi,$$

a więc prawej stronie naszej równoważności, która tem samem, jest uzasadnioną.

Z kontrapozycji uogólnionej korzystamy bardzo często w matematyce. W ten sposób z jednego twierdzenia możemy nieraz otrzymać drugie, napozór różne od niego. Jeżeli n. p. $p_1$ i $p_2$ oznaczają jakieś punkty, a $r_1$ i $r_2$ — jakieś dwie proste, to mamy twierdzenie następujące: Jeżeli każdy z punktów $p_1$ i $p_2$ leży na każdej z prostych $r_1$ i $r_2$, a przytem punkty $p_1$ i $p_2$ są różne, to proste $r_1$ i $r_2$ nie są różne. Stosując do tego twierdzenia kontrapozycję uogólnioną, otrzymujemy to samo twierdzenie w postaci następującej: Jeżeli każdy z punktów $p_1$ i $p_2$ leży na każdej z prostych $r_1$ i $r_2$ a przytem proste $r_1$ i $r_2$ są różne, to punkty $p_1$ i $p_2$ nie są różne.

Kontrapozycja uogólniona ma też zastosowanie w syllogistyce. Korzystaliśmy z niej już w dowodzie syllogizmu podług trybu Baroco. Zauważyliśmy bowiem, że syllogizm Barbara może być przedstawiony w postaci zdania warunkowego:

$$MAP . SAM . \supset . SAP,$$

ale zdanie to równoważnem jest zdaniu takiemu:

$$MAP . \sim (SAP) . \supset . \sim (SAM);$$

od jednego do drugiego przechodzimy właśnie przez kontrapozycję uogólnioną. Jeżeli uwzględnimy związki kwadratu logicznego, to powyższe zdanie przybierze postać:

$$MAP . SOP . \supset . SOM.$$

Mamy więc tryb:

$$\frac{\begin{array}{c}MAP\\SOP\end{array}}{SOM.}$$

Jest to tryb Baroco. Widzimy, iż powstaje on z trybu Barbara przez przestawienie przesłanki mniejszej z wnioskiem, przy równoczesnem zaprzeczeniu obu. Ale możemy z wnioskiem przestawić przesłankę większą. Z trybu Barbara otrzymamy tedy tryb Bocardo:

$$\frac{\begin{array}{c}SOP\\SAM\end{array}}{MOP.}$$

Każdy może sam wykonać znakomite ćwiczenie, polegające na wyszukaniu podobnych związków dla każdego trybu. Jeżeli przytem uwzględnimy Leibnizowskie tryby z osłabioną konkluzją, to okaże się, iż z 24-ch trybów ważnych da się utworzyć osiem trójek takich, że w każdej z nich przechodzimy od jednego trybu do drugiego przez kontrapozycję uogólnioną. Trójki te są następujące:

1. Barbara, Baroco, Bocardo;
2. Barbari, Camestros, Felapton;
3. Celarent, Festino, Disamis;
4. Celaront, Cesaro, Darapti;
5. Darii, Camestres. Ferison;
6. Ferio, Cesare, Datisi;
7. Bamalip, Fesapo, Calemos;
8. Calemes, Dimatis, Fresison

Na tych związkach w rzeczywistości, opiera się klasyczne uzasadnienie syllogizmów Baroco i Bocardo. Zauważyć również należy ten ciekawy fakt, że kontrapozycja wiąże każdy tryb figury I. z jednym trybem figury II. i jednym figury III; natomiast tryby figury IV. łączy ona z trybami tej samej figury Dlatego właśnie mógł Leibniz sprowadzać tryby figur II. i III. do trybów figury I., natomiast nie umiał tego uczynić dla trybów figury IV.

Przystępujemy teraz do jednego z najtrudniejszych pytań w całej logice, mianowicie do pytania o istocie modus ponens. Pytania tego dawniej prawie zupełnie nie poruszano; dopiero nowsza literatura fachowa, zwłaszcza angielska obfituje w rozprawki na ten temat. Modus ponens należy uważać za zastosowanie zdania warunkowego, za sposób wnioskowania, t. j. pewien sposób postę-

powania, polegający na przejściu od stwierdzenia jednego zdania do stwierdzenia drugiego zapomocą zdania warunkowego. Niech będzie zdanie warunkowe

$$\Sigma \supset \Pi;$$

jeżeli tedy, przy pewnej wartości zmiennych, $\Sigma$ staje się zdaniem prawdziwem, to zdanie, w jakie przemienia się $\Pi$ jest zdaniem także prawdziwem. Na wyciągnięciu tego ostatniego wniosku polega modus ponens. Modus ponens polega zatem na wnioskowaniu o prawdziwości następnika zdania warunkowego z prawdziwości poprzednika.

Ponieważ ze zdania

$$\Sigma \supset \Pi$$

wynika

$$\sim \Pi \supset \sim \Sigma,$$

więc z prawdziwości $\sim \Pi$ możemy wnioskować o prawdziwości $\sim \Sigma$ (oczywiście, zawsze przy podstawieniu pewnych stałych za zmienne, w przeciwnym bowiem razie nie może być mowy o prawdziwości poprzednika lub następnika), innemi słowy, z fałszywości $\Pi$ możemy wnioskować o fałszywości $\Sigma$. Gdy zatem mamy jakieś zdanie warunkowe, możemy z fałszywości następnika wnioskować o fałszywości poprzednika. Taki sposób wnioskowania nosi, w logice tradycyjnej nazwę modus tollens

Należy odróżniać modus ponens. który jest zastosowaniem wynikania, od samego wynikania; jest to bardzo ważna różnica. Anglicy mają na te rzeczy dwie odrębne nazwy: implication zwie się wynikanie. a inference jego zastosowanie.

Bardzo pospolite są błędy w stosowaniu modus ponens. W szczególności wnioskuje się nieraz z prawdziwości następnika o prawdziwości poprzednika oraz z fałszywości poprzednika o fałszywości następnika. Jest to naturalnie, wnioskowanie zupełnie błędne. Tak n. p. prawdą jest, że, jeśli ktoś mówi. to żyje; natomiast nie jest prawdą, że, jeśli ktoś żyje, to mówi, Możemy więc z tego, że ktoś mówi, wnioskować, że żyje (modus ponens), albo z tego, że ktoś nie żyje, że nie mówi (modus tollens); natomiast byłby to gruby błąd, gdybyśmy z tego, iż ktoś żyje, chcieli wnosić, że mówi, albo na tej podstawie, że nie mówi, utrzymywali, że nie żyje. Błędy te są szczegółowo omówione w każdym traktacie logiki.

Z wnioskowaniem przez modus ponens związaną jest pewna aporja, którą podał Levis Carrol w żartobliwym artykule p. t. „Co

powiedział żółw Achillesowi?“ Opowiada autor, że Achilles pomimo wszystkich argumentów Zenona, dogonił żółwia i dogoniwszy go, usiadł na nim dla odpoczynku. Wówczas żółw zadał mu następujące pytanie: W jednem z pierwszych podań Euklidesa rozważa się trójkąt $ABC$. Powiada Euklides, że, jeżeli dwie wielkości są równe trzeciej, to są równe między sobą. Ponieważ zaś boki $AB$ i $AC$ są równe bokowi $BC$, zatem boki $AB$ i $AC$ są równe między sobą. Żółw zgadza się wprawdzie na to, iż z równości:

$$AB = BC \text{ i } AC = BC$$

wynika

$$AB = AC,$$

zgadza się nawet na to, iż zachodzą rzeczywiście równości:

$$AB = BC \text{ i } AC = BC,$$

ale chce wiedzieć, na jakiej podstawie my stąd wyciągamy wniosek

$$AB = AC.$$

W odpowiedzi na to, Achilles prosi żółwia o przyjęcie przesłanki, podług której równość ta wynikałaby z założeń. Żółw przyjmuje tę przesłankę, ale znowu się zapytuje, na jakiej podstawie wyciągamy stąd zakwestjonowany przez niego wniosek? Achilles znowu prosi żółwia o przyjęcie odpowiedniej przesłanki, którą też żółw przyjmuje. Ale żółw, skoro już raz i drugi zakwestjonował stosowanie modus ponens, może je zakwestjonować po raz trzeci, czwarty i t. d. Mamy więc regressus in infinitum i dowód jest udaremniony.

Aporja powyższa powstaje wtedy, gdy modus ponens uważa się za przesłankę. Przesłanka ta opiewa, że jeśli prawdziwem jest jakieś zdanie warunkowe i jego poprzednik, to prawdziwym jest jego następnik. Ideograficznie wyraża ją wzór:

$$\Sigma . \Sigma \supset \Pi . \supset . \Pi.$$

Aby na podstawie tej przesłanki otrzymać wniosek $\Pi$, musielibyśmy zastosować znowu modus ponens, t. j. ją samą. Potrzebną więc będzie nowa przesłanka, którą zapiszemy w skróceniu:

$$\Sigma_1 . \Sigma_1 \supset \Pi . \supset . \Pi.$$

jeśli przez $\Sigma_2$ oznaczymy poprzednik ostatniej przesłanki, t. j.

$$\Sigma . \Sigma \supset \Pi.$$

Ale do zastosowania tej przesłanki będzie potrzebną jeszcze jedna przesłanka, do tej — jeszcze druga i t. d. w nieskończoność.

Najjaśniej się to okaże, jeśli przedstawimy dowód w postaci tabelki. Dowód bowiem $\Pi$, oparty na modus ponens, jako sposobie wnioskowania, gdy mamy dane

$$\Sigma \text{ i } \Sigma \supset \Pi,$$

składa się z dwóch wierszy. Jeśli przytem przez liczbę 1. oznaczymy pierwszą z tych przesłanek, a przez 2. — drugą, to można go zapisać jak następuje:

1. $|\!\rightarrow \Sigma$ (1)
(1). 2. $|\!\rightarrow \Pi$ c. b. d. o.

Stosujemy tu modus ponens w drugim wierszu. Jeżeli go pojmować jako przesłankę, to musimy dołączyć do spisu przesłanek przesłankę następującą:

3. $\Sigma . \Sigma \supset \Pi . \supset . \Pi.$

Dowód byłby:

1. $|\!\rightarrow \Sigma$ (1)
2. $|\!\rightarrow \Sigma \supset \Pi$ (2)
(1). (2). 3. $|\!\rightarrow \Pi$ c. b. d. o.,

ale i tu możemy zakwestjonować ostatni krok. Trzeba więc będzie dołączyć nową przesłankę; ale i ona nas od tego nie uchroni. Mamy więc istotnie regressus in infinitum! Wzmiankowany artykuł kończy się zapewnieniem, że Achilles dotąd zapisuje przesłanki w swym notatniku.

Tę samą kwestję poruszył już znacznie wcześniej Bolzano w sposób zupełnie poważny, zastanawiając się w § 199 swej logiki nad pytaniem, czy można modus ponens uważać za przesłankę Dla nas nie ulega wątpliwości, iż modus ponens nie można uważać za przesłankę; modus ponens musi być przyjęty jako sposób wnioskowania.

Chcemy teraz zwrócić uwagę na związek logiki zdań z logiką Arystotelesa. Niech więc będzie zdanie warunkowe

$$\Sigma \supset \Pi;$$

jeżeli tedy oznaczymy odpowiednio przez $S$ i $P$ terminy klas, okre-

ślonych funkcjami $\Sigma$ i $\Pi$, to nasze zdanie będzie równoważnem zdaniu Arystotelesowskiemu

$$SAP.$$

Moglibyśmy nawet używać litery $A$ zamiast znaku wynikania. Zdanie

$$\Sigma A \Pi$$

znaczyłoby to samo, co:

$$\Sigma \supset \Pi.$$

W podobny sposób możnaby określić zdania, odpowiadające innym zdaniom orzekającym logiki Arystotelesa. Mielibyśmy tedy z definicji

$$\Sigma E \Pi \equiv \Sigma A \sim \Pi \equiv \Sigma \supset \sim \Pi$$
$$\Sigma I \Pi \equiv \sim (\Sigma E \Pi) \equiv \sim (\Sigma \supset \sim \Pi)$$
$$\Sigma O \Pi \equiv \sim (\Sigma A \Pi) \equiv \sim (\Sigma \supset \Pi).$$

Na takie zdania da się rozciągnąć wnioskowanie syllogistyczne. Przytem, jeśli przyjmiemy ograniczenie, by żadna z rozważanych funkcyj nie zamieniała się stale w zdanie fałszywe, to mieć będziemy syllogistykę Arystotelesowską; jeśli zaś dopuścimy tego rodzaju funkcje, to mieć będziemy syllogistykę podobną do tej, która uwzględnia klasy puste.

Gdy mamy jakąś ilość funkcyj logicznych,

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n,$$

zachodzić mogą pomiędzy niemi różne związki; weźmiemy teraz pod rozwagę najprostsze dwa z pośród nich. Pierwszy z nich — to wzajemne wyłączanie się, które polega na tem, że, gdy tylko jedna z powyższych funkcji zamienia się w prawdę, wszystkie pozostałe zamieniają się w fałsz, a więc:

$$\Sigma_i . \supset \sim \Sigma_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n ; k \neq i)$$

Gdy zatem wiemy, iż jedna z powyższych funkcyj zamienia się w prawdę, możemy stąd wnioskować, że inne zamieniają się w fałsz; taki sposób wnioskowania nosi nazwę modus ponendo-tollens.

Drugi stosunek możliwy pomiędzy naszemi funkcjami — to stosunek wyczerpywania, polegający na tem, że wszystkie te funkcje nie mogą równocześnie stawać się fałszem; stosunek taki zapisujemy jak następuje:

$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 \vee \ldots \vee \Sigma_n.$$

Jest to zdanie rozjemcze. Gdy zatem o wszystkich rozważanych funkcjach, z wyjątkiem jednej, wiemy, iż zamieniają się w zdania fałszywe, możemy stąd wywnioskować, iż ta ostatnia właśnie zamienia się w zdanie prawdziwe. Taki sposób wnioskowania zwie się modus tollendo-ponens.

Pomiędzy funkcjami:

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$$

zachodzić mogą naraz oba związki, które rozważaliśmy. Mamy wtedy dysjunkcję, którą zapisywać będziemy sposobem Burali-Forti'ego:

$$\Sigma_1 \circ \Sigma_2 \circ \ldots \circ \Sigma_n.$$

Dysjunkcja, będąc połączeniem stosunków: wykluczania się i wyczerpywania, posiada, oczywiście, własności obu tych stosunków.

W logice klasycznej i w wielu współczesnych podręcznikach rozważa się jedynie dysjunkcję. Niektórzy jednak logicy wydzielają osobno stosunki: wzajemnego wykluczania się i wyczerpywania. Naszem zdaniem mają oni słuszność, albowiem często zachodzi pomiędzy jakiemiś funkcjami jeden z tych stosunków bez drugiego rozważania zatem tych logików dają się częściej stosować. W matematyce często spotyka się stosunek dysjunkcji. Jeśli n. p. $a$ i $b$ są dwie liczby rzeczywiste, to mamy:

$$a = b \circ a > b \circ a < b.$$

Najczęściej jednak spotykamy sie ze stosunkiem wyczerpywania.

Na wyczerpywaniu opartą jest złożona forma dowodu, zwana polilematem. Gdy bowiem jakieś funkcje:

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$$

spełniają związki:

$$\Sigma_1 \supset \Pi_1, \Sigma_2 \supset \Pi_2, \ldots, \Sigma_n \supset \Pi_n,$$

to mamy następujący stosunek wynikania:

$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 \vee \ldots \vee \Sigma_n . \supset . \Pi_1 \vee \Pi_2 \vee \ldots \vee \Pi_n.$$

Istotnie, niech przy jakiemś podstawieniu za zmienne zamieni się w prawdę poprzednik tego zdania; jest tedy jakieś $\Sigma_i$, które zamienia się w prawdę. Ale ponieważ

$$\Sigma_i \supset \Pi_i,$$

mamy wówczas także $\Pi_i$, a zatem

Polilemat przybiera najprostszą postać, która często występuje w matematyce, jeśli wszystkie

$$\Pi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

są identyczne. Wówczas, jeżeli zachodzą związki:

$$\Sigma_1 \supset \Pi, \Sigma_2 \supset \Pi, \ldots, \Sigma_n \supset \Pi,$$

to mamy:

$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 \vee \ldots \vee \Sigma_n . \supset . \Pi.$$

Powracając do naszego pierwotnego założenia, jeśli mamy:

$$\Sigma_1 \supset \Pi_1, \Sigma_2 \supset \Pi_2, \ldots, \Sigma_n \supset \Pi_n,$$

to mamy również, przez kontrapozycję:

$$\sim \Pi_1 \supset \sim \Sigma_1, \sim \Pi_2 \supset \sim \Sigma_2, \ldots, \sim \Pi_n \supset \sim \Sigma_n,$$

a zatem:

$$\sim \Pi_1 \vee \sim \Pi_2 \vee \ldots \vee \Pi_n . \supset . \sim \Sigma_1 \vee \sim \Sigma_2 \vee \ldots \Sigma_n .$$

Najczęściej korzysta się z tego związku, kiedy wszystkie

$$\Sigma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

są identyczne; wówczas, jeśli:

$$\Sigma \supset \Pi_1, \Sigma \supset \Pi_2, \ldots, \Sigma \supset \Pi_n,$$

to mamy:

$$\sim \Pi_1 \vee \sim \Pi_2 \vee \ldots \sim \Pi_n . \supset . \sim \Sigma.$$

Oto przykłady na zastosowanie polilematu w matematyce: W dowodzie twierdzenia, iż w kole miara kąta obwodowego równa się połowie miary łuku, na którym się wspiera, rozróżniamy trzy przypadki: 1° Środek koła leży na jednem z ramion rozważanego kąta; 2° Środek leży wewnątrz tego kąta; 3° Środek leży na zewnątrz jego. W każdym z tych przypadków zosobna dowodzimy naszego twierdzenia. W dowodzie twierdzenia o kwadracie boku przeciwległego jakiemuś kątowi (w trójkącie), rozróżniamy także trzy przypadki, zależnie od tego, czy kąt ten jest większy, równy, czy mniejszy od kąta prostego.

Na zakończenie niniejszego ustępu, uzasadnimy twierdzenie

Hauber'a o odwracalności zdań warunkowych. Twierdzenie to polega na tem, że, jeśli pomiędzy funkcjami:

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$$

zachodzą związki

1. $\Sigma_1 \supset \Pi_1, \Sigma_2 \supset \Pi_2, \ldots, \Sigma_n \supset \Pi_n,$
2. $\Sigma_1 \vee \Sigma_2 \vee \ldots \vee \Sigma_n,$
3. $\Pi_i \supset \sim \Pi_k \qquad (k \neq i),$

wówczas mamy:

$$\Pi_1 \supset \Sigma_1, \ \Pi_2 \supset \Sigma_2, \ldots, \Pi_n \supset \Sigma_n,$$

a zatem związki 1. są odwracalne. W rzeczy samej, przez kontrapozycję otrzymać możemy związki 1. w postaci takiej:

1'. $\sim \Pi_1 \supset \sim \Sigma_1, \sim \Pi_2 \supset \sim \Sigma_2, \ldots, \sim \Pi_n \supset \sim \Sigma_n.$

Mając udowodnić związek

$$\Pi_i \supset \Sigma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

załóżmy, iż jakieś $\Pi_i$ zamieniło się w zdanie prawdziwe. Mamy tedy ze względu na 3.

$$\sim \Pi_k \qquad (k \neq i)$$

skąd, stosując 1', otrzymujemy

$$\sim \Sigma_k \qquad (k \neq i).$$

Stąd zaś, stosując modus tollendo-ponens, dostajemy $\Sigma_i$; mamy więc istotnie, dla dowolnego $i$, wynikanie

$$\Pi_i \supset \Sigma_i, \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Zazwyczaj twierdzenie Haubera podaje się w cokolwiek innej postaci, mianowicie zakłada się, iż między funkcjami

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$$

jakoteż między funkcjami

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$$

zachodzi dysjunkcja, t. j.

2'. $\Sigma_1 \circ \Sigma_2 \circ \ldots \circ \Sigma_n,$
3'. $\Pi_1 \circ \Pi_2 \circ \ldots \circ \Pi_n.$

Zdawałoby się zatem, żeśmy twierdzenie Haubera uogólnili. Ale tak nie jest; założenia nasze nie są w rzeczywistości ogólniejsze od powyższych, albowiem z założeń 1., 2., 3. wynika:

4. $\Sigma_i \supset \sim \Sigma_k \qquad (k \neq i)$
5. $\Pi_1 \vee \Pi_2 \vee \ldots \vee \Pi_n$.

W rzeczy samej, gdybyśmy mieli

$$\Sigma_i \text{ i } \Sigma_k \qquad (i \neq k)$$

to, na mocy założenia 1., mielibyśmy również

$$\Pi_i \text{ i } \Pi_k \qquad (i \neq k),$$

co przeczy założeniu 3.; związek 4. musi zatem zachodzić. Zwracając się do zdania 5., zauważmy, że gdybyśmy mieli

$$\sim \Pi_1 . \sim \Pi_2 . \ldots . \sim \Pi_n,$$

to, ze względu na 1', mielibyśmy również

$$\sim \Sigma_1 \sim \Sigma_2 . \ldots . \sim \Sigma_n,$$

co przeczy założeniu 2.; mamy więc i związek 5. Obie wypowiedzi twierdzenia Haubera są zatem równoważne; lepiej jest jednak tak je formułować, jak myśmy to uczynili, reszta bowiem warunków jest niepotrzebną.

Twierdzenie Haubera daje się często stosować w matematyce. W geometrji elementarnej mamy n. p. twierdzenie następujące: Jeżeli litery $a$ i $b$ oznaczają boki trójkąta, $A$ i $B$ zaś — kąty przeciwległe, to zachodzą związki:

$$a > b . \supset . A > B$$
$$a = b . \supset . A = B$$
$$a < b . \supset . A < B.$$

Twierdzenie Haubera daje nam możność sformułowania twierdzenia odwrotnego, którego osobno dowodzić nie potrzebujemy:

$$A > B . \supset . a > b$$
$$A = B . \supset . a = b$$
$$A < B . \supset . a < b.$$

## ROZDZIAŁ X.

# O metodach rozumowania.

Jak widzieliśmy, nauka dedukcyjna składa się ze zdań, powiązanych ze sobą logicznie, t. j. przez wnioskowanie; w takiej postaci poznajemy gotową naukę. Taka nauka, dla swego uzasadnienia, wymaga tylko dedukcji wszystkich twierdzeń z postulatów i definicyj. Ale powstaje pytanie, poruszone zaledwie przez nas w I. rozdziale: jak się tworzy naukę? Chodzi najpierw o sposób wykrywania twierdzeń, z których nauka się składa. Jeżeli n. p. ktokolwiek nam powie, iż kwadrat boku przeciwległego kątowi prostemu w trójkącie równa się sumie kwadratów boków przyległych, to możemy, przez rozumowanie, przekonać się, że tak jest istotnie. Ale w jaki sposób sami moglibyśmy wpaść na myśl, że zachodzi takie twierdzenie, a przynajmniej na myśl poszukania zależności między kwadratem przeciwprostokątnej a sumą kwadratów przyprostokątnych? Powiedzieliśmy, iż mając twierdzenie, możemy je sprawdzić; ale właściwie sama logika pozwala nam dopiero sprawdzić gotowy dowód, gdy jest nam danym. Ale jak znajdziemy dowód, gdy nam nie jest danym? Możemy powiedzieć, że poszukujemy intuicyjnie twierdzenia i kiedy nam się zdaje, że je znaleźliśmy, poszukujemy dowodu; kiedy zaś nam się zdaje, iż dowód znaleźliśmy, sprawdzamy go logicznie. Dla ścisłości należałoby dodać, iż w rzeczywistości czynności te nie są dokładnie rozdzielone; owszem łączą się one ze sobą i przeplatają.

Przy wynajdywaniu twierdzeń nowych, samych dla siebie (a więc nie dla dowodu innych twierdzeń), najskuteczniejszą metodą jest stawianie pytań o stosunku, jaki zachodzić ma między danemi pojęciami albo o wyznaczaniu jakichś wartości na podstawie innych (danych) wartości. Odpowiedź na każde takie pytanie stanowi twierdzenie. Pytania stawiać łatwo, ale wybrać z pośród nich

takie, na które udaje się znaleźć odpowiedź — w tem leży trudność. Szczególnie teorja liczb daje tego liczne i jaskrawe przykłady.

Trzeba zauważyć, iż przy poszukiwaniu dowodu, musimy najczęściej poszukiwać twierdzeń do tego potrzebnych, a przytem nieraz tworzyć nowe.

Wreszcie zasługuje na uwagę, iż w twórczości matematycznej przeważnie chodzi o pomysły. Czy taki pomysł (wynikanie przypuszczalne) okazuje się prawdziwym czy fałszywym — to jest mniej ważne. Często bowiem zdarza się, iż wystarczy dodać pewne uzupełnienie, aby pomysł dał twierdzenie prawdziwe. A nawet wtedy, kiedy trzeba go odrzucić, naprowadzić to może przez analogję na nowy, tym razem udatny pomysł. Aby jednak znaleźć coś ważnego, musimy wypróbowywać ogromną moc takich pomysłów. Tołstoj wyznaje, że, gdy pisał powieść, miljony kombinacyj możliwych brał pod uwagę, zanim ostatecznie postanawiał o losie swych bohaterów. I w nauce nie dzieje się inaczej. Poincaré wspomina o czemś podobnem. Wybitni badacze tem właśnie różnią się od innych, że posiadają jakiś szczególny zmysł, pozwalający im odrzucać bardzo szybko kombinacje nie prowadzące do celu.

Nie istnieje logika, którаby służyła do wykrywania twierdzeń i ich dowodów. Dotychczasowe próby utworzenia takiej nauki nie doprowadziły do pożądanych wyników. Tworzenie nauki należy do sfery intuicji twórczej, która za sprawą fantazji, stawia pytania i przeważnie zapomocą indukcji, odgaduje odpowiedzi, kierując się najczęściej analogją z teorjami znanemi. Do badania twierdzeń danych posiadamy pewne bardzo ogólne wskazówki. Otóż, zanim przejdziemy do badania dowodów zupełnych, podamy tu rzecz o tych ogólnych metodach rozumowania.

Niektóre z tych metod już poznaliśmy; m. i. korzystaliśmy z redukcji i widzieliśmy, jakie usługi ona oddaje. W związku z redukcją znajdują się pomysły, które rozwinął i ujął w pewien system znakomity matematyk francuski, Duhamel, w pięciotomowem dziele p. t. „Des méthodes dans les sciences de raisonnement“ (O metodach w naukach rozumowych; 1865—1871). W pierwszej części, która stanowi wstęp logiczny do powyższego dzieła, podaje on zarys teorji dowodu; z początku zajmuje się on analizą starożytnych, wykazuje jej słabe strony i dochodzi do wniosku, iż właściwą analizą powinna być redukcja. Jeżeli chodzi o dowód czegoś należy zaczynać od tego, co mamy udowodnić i szukać twierdzenia

z któregoby to wynikało. Jeżeli takiego twierdzenia nie znajdujemy, to tworzymy przypuszczalne. Tak się cofamy od końca do początku. To jest właśnie redukcja. Duhamel nazywa redukcję analizą a dedukcję — syntezą; nazwy te jednak się nie utrzymały.

Redukcja ma nadzwyczaj wielkie znaczenie w nauczaniu matematyki. Zapomocą tej metody można dokonywać cudów. Dzieci, które nie lubią matematyki, mogą się nią bardzo zainteresować, jeśli je nauczymy postępować przez redukcję. Pojęcie to należy im podawać od najwcześniejszego wieku. Zaznajamiać je z niem można na zadaniach, pobudzając do myślenia przez stawianie odpowiednich pytań. Wiele można zrobić przez umiejętny dobór tych ostatnich. Trudności musi się, oczywiście, stopniować, dając najpierw zadania o dwóch ogniwach redukcji, potem o trzech i t. d. Wiele zastosowań ma redukcja w geometrji. N. p. na początku stereometrji jest szereg bardzo prostych twierdzeń, ale co twierdzenie, to inny dowód. Jeżeli więc ktoś nie zna dowodu, to nie wie, jak go zacząć. Tymczasem zapomocą redukcji układa się te dowody w sposób bardzo prosty.

Nakoniec zaznaczyć trzeba, iż redukcja jest drogą zupełnie pewną, ale zato trudną, trudniejszą od analizy starożytnych, bo bez żadnego porównania trudniej jest wyszukiwać twierdzenie podług wniosku, jaki ono ma dać, niż wyszukiwać wnioski z danego twierdzenia.

W Elementach Euklidesa (w przypisku do księgi XIII.) znajdujemy następujące, krótkie i niezbyt jasne określenie analizy i syntezy:

> „Analiza jest to wzięcie rzeczy badanej za prawdziwą, skąd przez wnioskowanie przychodzi się do rzeczy istotnie prawdziwej. Synteza jest wzięcie rzeczy prawdziwej, skąd przez wnioskowanie przychodzi się do rzeczy istotnie prawdziwej“.

Wspominaliśmy już, że analiza starożytnych powstała prawdopodobnie w szkole Platona. Metoda ta polega na wyciąganiu wniosków ze zdań, o których nie wiemy, czy są prawdziwe. Wnioski te mogą się okazać prawdziwe lub fałszywe. W tym ostatnim przypadku, nasz punkt wyjścia jest przez to obalonym; na tem polega metoda dowodzenia twierdzeń przez reductio ad absurdum, o której niżej. Narazie zatrzymujemy się na pierwszej alternatywie. Jeżeli tedy dochodzimy do wniosków prawdziwych, to bezpośrednio nic stąd nie możemy wywnioskować o zdaniu, z którego wy-

szliśmy. Może ono być prawdziwem, ale też może być fałszywem. Tak n. p. ze zdania fałszywego

$$1 = 2,$$

mnożąc przez zero obustronnie, dostajemy

$$0 = 0,$$

a więc wniosek prawdziwy. Zdawałoby się, że w tym przypadku analiza starożytnych nic nie daje. Ale tak nie jest, nawiązaliśmy nić logiczną między zdaniem badanem a zdaniem prawdziwem. Możemy teraz spróbować przebyć tę samą drogę w odwrotnym kierunku. Może się to nie udać, bo dedukcja nie zawsze jest odwracalną. Ale, jeśli rozumowanie da się odwrócić, to dostajemy dowód syntetyczny zdania badanego. Cóż więc zyskujemy? Zyskujemy punkt wyjścia, o którym zgóry nie mieliśmy pojęcia. W tym nawet przypadku, kiedy rozumowanie nie daje się odwrócić, mamy częstokroć już część dowodu, bo, wywodząc następstwa z badanego twierdzenia w innych kierunkach, możemy przyjść do innych zdań prawdziwych i ze wszystkich zdań tak otrzymanych razem może się dać wyprowadzić nasze twierdzenie.

Damy teraz parę przykładów zastosowań analizy starożytnych. Szukajmy więc dowodu twierdzenia takiego. Jeżeli $a$ i $b$ są liczby dodatnie, to zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$$

Dla znalezienia dowodu, zakładamy, iż zachodzi powyższa nierówność. Przez kolejne przekształcanie jej, otrzymamy tedy następujące nierówności:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geqq 2,$$
$$a^2 + b^2 \geqq 2ab,$$
$$a + b - 2ab \geqq 0,$$
$$(a - b)^2 \geqq 0.$$

Ostatnia nierówność jest niewątpliwie prawdziwą; rozumowanie zaś daje się odwrócić. Wychodząc więc z przesłanki:

$$(a - b)^2 \geqq 0,$$

możemy dojść do żądanego wniosku.

Tu powstaje najważniejsze pytanie, co kieruje naszemi krokami tak. aby wychodząc z danej nierówności, dojść do tej ostatniej, która jest prawdziwą? Dokonujemy pewnych przekształceń, ale ilość możliwych przekształceń jest nieskończoną. Skąd wiemy, iż te przekształcenia, które zaczynamy stosować, doprowadzą do celu? W danym przypadku łańcuch przekształceń jest krótki, więc jest to łatwe; ale takie łańcuchy bywają przerażająco długie. W jaki sposób je znajdujemy? Tu tkwi właśnie trudność matematyki. Do przełamania tej trudności w osobnych przypadkach służą różne metody (drogi) badania. W danym razie metoda jest bardzo prosta. Sprowadzamy nierówność do najprostszej postaci

$$f(a, b) \geqq 0,$$

gdzie $f$ oznacza funkcję całkowitą i wymierną zmiennych $a$ i $b$.

Analiza starożytnych ma wielkie zastosowanie także w rozwiązywaniu wszelkich równań i nierówności. Równanie należy uważać za pytanie, czy istnieją wartości na niewiadome, dla których to równanie się sprawdza, i, jeżeli istnieją, to jakie mianowicie. Analiza wychodzi z założenia. że takie wartości istnieją i są podstawione na miejsce niewiadomych Jeżeli tedy, przez dedukcję, dochodzimy do określonych wartości na te niewiadome, to nie oznacza to jeszcze wcale, aby te wartości stanowiły poszukiwane rozwiązanie. Istotnie, wychodzimy z przypuszczenia, o którem nie wiemy, czy jest prawdą, czy fałszem; jeżeli zaś ono jest fałszem. to następstwa nie mają żadnego znaczenia. Wynika więc z naszego rozumowania to tylko, że, jeżeli poszukiwane wartości istnieją, to muszą być takiemi, jak te, które znaleźliśmy. Tylko przebiegając drogę odwrotną, jeżeli ona jest możliwą, możemy się przekonać. że przypuszczenie. z którego wyszliśmy, było prawdziwem. Zamiast tego, możemy się przekonać jakąkolwiek inną drogą, iż otrzymane wartości istotnie czynią zadość zagadnieniu; albo też możemy uzupełnić analizę dowodem istnienia wartości poszukiwanych Ta ostatnia metoda ma nadzwyczaj wielkie znaczenie w matematyce.

Zasadę rozwiązywania równań objaśni nam prosty przykład. Niech więc chodzi o rozwiązanie równania:

$$5x + 9 = 3x + 15.$$

Zakładamy tedy istnienie rozwiązania i rozwiązanie to oznaczamy tą samą literą $x$. Przez przekształcenia otrzymujemy kolejno:

$$5x - 3x = 15 - 9$$
$$2x = 6$$
$$x = 3.$$

To znaczy, że, jeżeli istnieje $x$, czyniące zadość rozważanemu równaniu, to ma ono wartość $3$. Że ono istnieje — przekonać się możemy dopiero, wykonując te same przekształcenia w odwrotnym porządku; zobaczymy, iż rozumowanie było odwracalnem. Moglibyśmy także przekonać się, iż znaleziona wartość czyni zadość równaniu, przez podstawienie jej za niewiadomą w tem równaniu. Równanie zamieniłoby się wtedy w tożsamość, a więc byłoby sprawdzone.

Niekiedy, badając równanie zapomocą analizy starożytnych, zamiast dojść do domniemanego rozwiązania, dochodzimy do równości fałszywej. Wówczas możemy być pewni, iż rozważane równanie rozwiązania nie posiada; mamy tego dowód przez reductio ad absurdum. Zwróćmy się n. p. do równania:

$$3x + 5 = 3x + 6.$$

Znajdujemy

$$3x - 3x = 6 - 5$$

t. j.

$$0 = 1,$$

a więc jawny fałsz. Rozwiązanie zatem nie istnieje. Mówi się wprawdzie niekiedy, iż istnieje rozwiązanie $\infty$ (nieskończenie wielkie), ale jest to tylko modus dicendi, nad którym nie będziemy się tutaj zastanawiali.

Weźmy jeszcze przykład równania:

$$3x + 5 = 3x + 5.$$

Mamy tu:

$$3x - 3x = 5 - 5,$$

t. j.

$$0 = 0.$$

I w tym przypadku niewiadoma znika na końcu, ale dostajemy równość prawdziwą. Rozumowanie daje się odwrócić a więc każda wartość na $x$ czyni zadość powyższemu równaniu Jest to więc tożsamość.

W matematyce wyższej, mianowicie w tej jej części, która nosi nazwę analizy matematycznej, stosuje się bardzo często analizę

starożytnych w postaci poszukiwania warunków koniecznych, aby zachodził jakiś stosunek pomiędzy pewnemi pojęciami matematycznemi; następnie osiągnięte w ten sposób wyniki uzupełniamy podobnie, jak przy rozwiązywaniu prostych równań lub nierówności. Tutaj także wielką rolę odgrywają dowody istnienia.

Dla przykładu, weźmy następujące zagadnienie, dające się łatwo rozwiązać środkami zupełnie elementarnemi. Niech $x$ i $y$ będą zmienne rzeczywiste, których suma jednakże równa się stałej dodatniej, $c$. Kiedy $x$ i $y$ się zmieniają, zmienia się także ich iloczyn; czy i kiedy osiąga on najwyższą wartość? Przypuśćmy że osiąga on tę najwyższą wartość przy

$$x = a, y = b.$$

Mamy tedy:

$$a + b = c,$$

a nadto, dla każdej wartości na $x$ i $y$,

$$xy \leqq ab.$$

Nazwijmy $z$ różnicę $x - y$, a $d$ — różnicę $a - b$. Ze związków

$$\begin{cases} x + y = c, \\ x - y = z, \end{cases}$$

mamy wówczas:

$$\begin{cases} 2x = c + z, \\ 2y = c - z, \end{cases}$$

skąd:

$$4xy = c^2 - z^2$$

a więc

$$xy = \frac{c^2 - z^2}{4}$$

Podobnie jest

$$ab = \frac{c^2 - d^2}{4}$$

Z warunku na iloczyn $ab$, mamy:

$$\frac{c^2 - z^2}{4} \leqq \frac{c^2 - d^2}{4}$$

a zatem:

$$d^2 \leqq z^2.$$

Zachodzi to dla każdej pary wartości na $x$ i $y$, a więc dla każdego $z$ i w szczególności dla

$$z = 0.$$

Mamy więc

$$d^2 \leqq 0,$$

a że

$$d^2 \geqq 0,$$

musi być:

$$d^2 = 0,$$

skąd

$$d = 0,$$

t. j.

$$a - b = 0,$$

więc

$$a = b.$$

Jest to warunek konieczny by $a$ i $b$ były rozwiązaniem. Możemy się teraz przekonać, iż jest to warunek dostateczny. Istotnie, w razie spełnienia tego warunku, mamy:

$$ab - xy = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 - z^2}{4} = \frac{z^2}{4} \geqq 0,$$

a więc

$$ab \geqq xy, \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Nie będziemy się zastanawiali nad zastosowaniem analizy starożytnych do rozwiązywania zadań geometrycznych na konstrukcje, gdyż jest to pytanie (jedyne), które w książkach zawsze jest traktowane z podkreśleniem znaczenia analizy. Można znaleźć przykłady w doskonałej książce Petersen'a o tym przedmiocie, istniejącej także w przekładzie polskim, albo w dziele tegoż rodzaju Adlera, którego przekład na język rosyjski z doskonałym komentarzem prof. Szutunowskiego ukazał się kilkanaście lat temu.

Zastosowaniem analizy starożytnych jest ogólna metoda dowodzenia, zwana reductio ad absurdum, z której zresztą już kilkakrotnie korzystaliśmy. Dowód przez reductio ad absurdum jakiegoś twierdzenia $q$ polega na obaleniu

$$\sim q,$$

przeczenia tego twierdzenia. Dokonujemy tego w ten sposób, że,

wyciągając wnioski z $\sim q$, staramy się dojść do zaprzeczenia jakiegoś twierdzenia prawdziwego, $p$, a więc do

$$\sim p.$$

Jeśli to osiągniemy, będziemy mieli dowód, że nie może być $\sim q$, musi być zatem

$$q.$$

Reductio ad absurdum czyli dowód nie-wprost, ma przedewszystkiem dlatego wielkie znaczenie, że mamy tutaj gotowy punkt wyjścia, wiemy skąd dowód zacząć. Pomimo, iż w matematyce bardzo często posługujemy się dowodem nie-wprost, wielu matematyków i filozofów uważa tę metodę za wadliwą i gorszą od dowodu wprost. Pochodzi to zapewne stąd, że dowód taki opiera się na dysjunkcjach, przyczem łatwo jest opuścić jednę z alternatyw; wówczas mamy poprostu błąd. Jeżeli jednak dowód jest prowadzony bez błędu, to jest on równie dobrym, jak każdy inny. Zobaczymy zresztą, w jaki sposób można go, przez zastosowanie transpozycji, zamienić na dowód wprost.

Za przykład posłużyć nam może dowód twierdzenia XX. księgi IX. „Elementów“ Euklidesa. Twierdzenie to ma treść arytmetyczną; trzeba bowiem wiedzieć, że księgi: VII., VIII. i IX. jego „Początków geometrji“ zawierają wykład arytmetyki, ale wyłożonej — tak, jak to wogóle starożytni Grecy czynili — na odcinkach. Wspomniane twierdzenie. w książkach współczesnych wyrażanem bywa w sposób następujący: Ilość liczb pierwszych jest nieskończoną. Euklides jednak, zwyczajem matematyków starożytnych, unika nieskończoności i formułuje to twierdzenie tak: ilekolwiek weźmiemy liczb pierwszych, istnieje ich więcej, niż wzięliśmy.

Dowód Euklidesa zawiera reductio ad absurdum. Dowód ten, w oszpeconej postaci, powtarza się zwykle w podręcznikach arytmetyki. Oto jest ten dowód: Niech będą dane jakiekolwiek liczby pierwsze; pokażemy, że istnieje liczba pierwsza od nich odmienna. Niech najmniejsza wspólna wielokrotność liczb danych będzie $a$. Rozważmy liczbę $a + 1$. Ta liczba jest pierwsza albo nie-pierwsza. Jeżeli $a + 1$ jest pierwsza, to, jako większa od $a$, będzie większa od każdej z liczb wziętych, a więc różna od nich; mamy tedy żądaną liczbę. Jeżeli zaś $a + 1$ nie jest liczbą pierwszą, to posiada dzielnik pierwszy. Niech $b$ będzie dzielnikiem pierwszym liczby $a + 1$. Twierdzimy,

iż *b* jest odmiennem od każdej z liczb danych. I tego właśnie dowodzimy przez reductio ad absurdum. Przypuśćmy zatem, że *b* jest jedną z liczb danych. W takim razie dzieli ona wielokrotność *a*. Ale, z założenia, dzieli ona $a+1$, więc dzieli i różnicę tych dwóch liczb, t. j. liczbę *1*. To jednak jest niemożliwe. Twierdzenie jest zatem uzasadnione.

Twierdzenie, które podaje Euklides, uogólnić można jak następuje: Ilekolwiek wzięlibyśmy liczb naturalnych, istnieje liczba pierwsza od każdej z nich różna. W dowodzie uniknąć można dylematu, który u Euklidesa powstawał skutkiem tego, iż Grecy jedynki nie uważali za liczbę. Najważniejszem jest jednak to, iż, nie zmieniając istotnej myśli dowodu, unikniemy reductio ad absurdum. Oto nasz dowód: Niech *a* będzie iloczynem rozważanych liczb. Uważajmy tedy liczbę $a+1$; liczba ta posiada dzielnik pierwszy, *b*. Dzielnik ten dzieli $a+1$ i nie dzieli jedynki, zatem nie dzieli *a*. Ponieważ zaś dane liczby dzielą *a*, zatem (tryb Camestres) *b* nie jest żadną z nich. Mamy zatem szukaną liczbę i twierdzenie jest uzasadnione.

Widać w jaki sposób uniknęliśmy dowodzenia nie-wprost. Oto, Euklides powołuje się na przesłankę taką:

$(a+1)$ dzieli się przez *b*. *a* dzieli się przez *b* . $\supset$ . *1* dzieli się przez *b*.

My zaś twierdzenie to transponujemy i korzystamy z niego w postaci następującej:

$(a+1)$ dzieli się przez *b*. *1* nie dzieli się przez *b* . $\supset$ .
*a* nie dzieli się przez *b*.

Przez transpozycję, dowody nie-wprost zamieniają się na dowody wprost. Reductio ad absurdum ma jednak wielkie znaczenie przy poszukiwaniu dowodu.

Chcemy jeszcze zwrócić uwagę na pewien osobliwy sposób dowodzenia, który dostrzegł Saccheri, matematyk włoski, żyjący w XVII. wieku. Znalezienie tego właśnie sposobu dowodzenia pobudziło go prawdopodobnie do szukania dowodu znanego postulatu Euklidesa o linjach równoległych *). Zdawało mu się, że dowód znalazł przez reductio ad absurdum, ale w jego rozumowaniu był błąd. Znamienną jednak jest rzeczą, iż początkowe wnioski, jakie

*) W sprawie tego postulatu por. rozdział III. str. 49.

on wyciągnął z zaprzeczenia postulatu Euklidesa, odpowiadały dokładnie twierdzeniom geometrji Łobaczewskiego.

Metoda, o którą nam chodzi, polega na tem, że, chcąc udowodnić jakieś twierdzenie, $p$, wywodzimy je z jego przeczenia, t. j. dowodzimy zdania warunkowego:

$$\sim p \supset p.$$

Z tego zaś zdania wynika bezpośrednio $p$ Aby się o tem przekonać, wystarczy zastosować dylemat. Mamy bowiem z dysjunkcji podstawowej:

$$p \vee \sim p.$$

Jeżeli teraz zachodzi $p$, to mamy bezpośrednio to, o co chodziło, jeżeli zaś przypuścić $\sim p$, to. z uwagi na tamto zdanie warunkowe, mamy znowuż $p$. W obu zatem przypadkach twierdzenie $p$ zachodzi.

Saccheri nie wiedział, że przed nim już pisał o tym sposobie dowodzenia Cardano i zachwycał się nim. Cardano zaś nie wiedział, że już u Euklidesa znajduje się tego rodzaju rozumowanie. Używa go mianowicie Euklides w dowodzie twierdzenia XII. księgi IX. Twierdzenie tò jest następujące: Jeżeli jakaś liczba $a$, podniesiona do jakiejś potęgi $n$, podzielną jest przez jakąś liczbę pierwszą, $p$, to sama liczba $a$ jest podzielna przez ową liczbę $p$. My ograniczymy się tutaj do przypadku, kiedy jest

$$n = 2.$$

Chodzi więc o dowód tego, że, jeśli $a^2$ dzieli się przez liczbę pierwszą $p$, to $a$ dzieli się także przez $p$. Opieramy się tutaj na poprzednio udowodnionem (u Euklidesa) twierdzeniu, podług którego, jeśli iloczyn jakichś dwóch liczb, $a$ i $b$, dzieli się przez jakąś liczbę pierwszą i liczba $a$ nie dzieli się przez tę liczbę, to liczba $b$ dzieli się przez nią. W takim razie, dla dowodu twierdzenia, o które nam chodzi, należy tylko zauważyć, że mamy:

$$a^2 = a.\ a.$$

Teraz tem twierdzeniem $p$, do którego zastosujemy metodę, która nas obchodzi, jest zdanie: $a$ dzieli się przez $p$. Zaprzeczenie jest: $a$ nie dzieli się przez $p$. Zakładamy więc, że $a$ nie dzieli się przez $p$. Ale $a$ jest pierwszym czynnikiem iloczynu $a.\ b.$ który dzieli się przez tę liczbę. Wobec tego drugi czynnik dzieli się przez $p$; a że jest znowu $a$, więc $a$ dzieli się przez $p$. W ten sposób z przeczenia

zdania dochodzimy do jego stwierdzenia. Zatem *a* dzieli się przez *p*, c. b. d. o.

Powyższa metoda dowodzenia zachwycała Saccheri'ego i napełniała go nadzieją rozstrzygnięcia rozmaitych trudnych kwestyj. Wspominaliśmy już o tem, że myślał, iż zapomocą jej znalazł dowód postulatu Euklidesa. Prócz tego stosował tę samą metodę do logiki. W swem dziele p. t. „Logica demonstrativa" (1697) wychodzi on z tej myśli, iż zwykły sposób wykładania logiki nie jest zadowalającym, albowiem niema tam prawdziwych dowodów. On szuka tych dowodów. Metoda wywodzenia twierdzenia z jego przeczenia wydaje mu się szczególnie odpowiednią, ponieważ, jak mniema, stosowanie jej nie wymaga żadnych przesłanek. Myli się oczywiście Saccheri, albowiem wyciąganie wniosków z przeczenia twierdzenia, które chcemy udowodnić, nigdy nie może się odbywać bez przesłanek; poza tem musimy przyjmować pewne sposoby wnioskowania!

W cytowanem dziele, stosuje Saccheri swą ulubioną metodę dowodzenia do dowodów twierdzeń o syllogizmach. Chcąc n. p. udowodnić, że tryb $(AEE)_1$ jest nieważny, t. j. że tryb *AE* figury pierwszej nie daje wniosku *E*, rozumuje on tak: Przypuśćmy, iż tryb $(AEE)_1$ jest ważny. Mamy w każdym razie przesłanki następujące:

Tryb Barbara jest ważny.
Tryb $(AEE)_1$ nie jest trybem Barbara.

Są to właśnie przesłanki trybu $(AEE)_1$; wyciągamy przeto z nich wniosek:

Tryb $(AEE)_1$ nie jest ważny.

Przyjmując przeczenie twierdzenia, o które chodzi, dostajemy to samo twierdzenie. Jest ono zatem prawdziwe.

Podobne rozumowanie stosuje Bolzano dla obalenia bezwzględnego sceptycyzmu. Bolzano, umysł bardzo subtelny, rozumie, że go tem nie obali, ale podaje to rozumowanie. Chodzi mu mianowicie o dowód istnienia przynajmniej jednego zdania prawdziwego. Bierze on zaprzeczenie tego zdania, a więc zakłada, iż każde zdanie jest fałszywem. Wówczas może on ustawić syllogizm następujący (Barbara):

Każde zdanie jest fałszem.
„Każde zdanie jest fałszywe" jest zdaniem.
---
„Każde zdanie jest fałszywe" jest fałszem.

W takim razie prawdą jest przeczenie tego zdania, a więc: Istnieje choć jedno zdanie prawdziwe. Bezwzględny sceptyk mógłby jednak na to odpowiedzieć, że nie uznaje trybu Barbara...

Oprócz tych metod ogólnych, w matematyce stosuje się na każdym niemal kroku metodę, znaną pod nazwą indukcji matematycznej. Metoda ta stosuje się w przypadku, kiedy mamy do czynienia z jakimś ciągiem zdań,

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

Dowód zapomocą indukcji matematycznej, że każdy element tego ciągu jest zdaniem prawdziwem, składa się z trzech części następujących:

1) dowodu, że zachodzi zdanie $P_1$,

2) dowodu, że zachodzi zdanie warunkowe

$$P_n \supset P_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

3) konkluzji, że zachodzi ogólnie zdanie

$$P_n \qquad (n = 1, 2, \ldots n, \ldots)$$

Często można spotkać zdanie, iż metody tej użył poraz pierwszy Jakób Bernoulli (1654 — 1705). Już jednak w roku, w którym rodzi się Bernoulli, używa indukcji do swoich badań i formułuje ją zupełnie wyraźnie Błażej Pascal (1623 — 1662). Ale matematycy włoscy wykazali, iż metoda ta znajduje się użyta już w książce, wydanej w r. 1556, p. t. „Arithmeticae libri duo“, której autorem jest Maurolico (Maurolycus; 1494 — 1575) z Messyny, znany jako jeden z najzawziętszych przeciwników Kopernika.

O przykład zastosowania indukcji matematycznej nie trudno. Przypuśćmy, iż chodzi o dowód nierówności:

$$(1 + a)^n > 1 + na,$$

gdzie $a$ jest jakakolwiek liczba rzeczywista, nierówna zeru i większa od $-1$, $n$ zaś jest liczbą naturalną większą od jedności. Dowodzimy tej nierówności najpierw dla

$$n = 2.$$

Istotnie,

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a \text{ (gdyż } a^2 > 0).$$

Dokonujemy następnie tego, tak charakterystycznego dla indukcji matematycznej, przejścia od $n$ do $n+1$, t. j., przyjmując

$$(1+a)^n > 1+na,$$

chcemy wykazać, że jest

$$(1+a)^{n+1} > 1+(n+1)\,a.$$

W tym celu zauważmy, iż

$$1+a > 0.$$

Mnożąc więc stronami nierówność, którą przyjęliśmy, przez $1+a$, dostajemy:

$$(1+a)^{n+1} > (1+na)\,(1+a).$$

Ale

$$(1+na)(1+a) = 1+na+a+a^2 = 1+(n+1)\,a+a^2 >$$
$$> 1+(n+1)\,a \qquad \text{(gdyż } a^2 > 0\text{)}$$

skąd:

$$(1+a)^{n+1} > 1+(n+1)\,a.$$

Na zasadzie indukcji matematycznej opartą jest cała arytmetyka liczb całkowitych. Pierwszym, który ją podał w naukowej postaci, był Hermann Grassmann w dziele p. t. „Lehrbuch der Arithmetik“ (1861). Grassmannowski sposób uzasadnienia arytmetyki przyjęli matematycy włoscy z Peano'em na czele. Okazało się jednak, że istnieje, obok tego, drugi sposób uzasadnienia matematyki; mianowicie Russell i Whitehead w swem dziele „Principia mathematica“, rozwijają teorję liczb całkowitych wspólnie z liczbami pozaskończonemi. Sposób ten jest jednakże znacznie zawilszy od Grassmannowskiego.

W wykładzie Grassmann'a występują odrazu i liczby ujemne My jednak pokażemy tutaj tylko, jak można, jego sposobem, wyłożyć teorję liczb całkowitych nieujemnych. Za pojęcia prymitywne przyjmuje tedy Grassmann jedynkę i dodawanie jedynki. To ostatnie stanowi proceder, którym tworzymy nowe liczby. Tak więc z definicji

$$2 = 1+1,\ 3 = 2+1 \text{ i t. d.}$$

Za definicję dodawania przyjmuje Grassmann własność następującą:

(I) $$a+(b+1) = (a+b)+1.$$

Jest to definicja indukcyjna. To znaczy, iż nie określa ona bezpośrednio sumy $a + b$; podaje się tutaj tylko definicję sumy $a + (b + 1)$ przy pomocy sumy $(a + b)$. Ponieważ wiemy, czem jest wynik dodania jedynki do jakiejkolwiek liczby, więc wiemy, czem jest każda suma. Przypuśćmy n. p., że chcemy obliczyć sumę $4 + 3$. Mamy tedy:

$$4 + 3 = 4 + (2 + 1) = 4 + 2 + 1 = 4 + (1 + 1) + 1 =$$
$$= 4 + 1 + 1 + 1 = 5 + 1 + 1 = 6 + 1 = 7.$$

Dodawanie posiada rozmaite inne własności; Grassmann, na początek, dowodzi trzech twierdzeń następujących:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$,
2. $a + 1 = 1 + a$,
3. $a + b = b + a$,

gdzie $a$, $b$, $c$ są liczby całkowite. Pierwsza z tych własności — to własność łączności, trzecia — przemienności; druga stanowi szczególny przypadek tej ostatniej i jest lematem do jej dowodu.

Zanim przytoczymy dowody Grassmann'a zwrócić musimy uwagę na jego sposób pojmowania równości. Trzeba bowiem wiedzieć, iż Grassmann wykorzystał myśl Leibniz'a, który uważał za równe wielkości takie, iż można w każdem zdaniu zastępować jedną przez drugą, „salva veritate“, t. j., jeśli to zdanie jest prawdziwe, bez naruszenia jego prawdziwości. W ten sposób pojmują równość także Russell i Whitehead. Prowadzi to jednak do pewnych komplikacyj. Tak n. p. zdanie: „Symbole $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$ są różne“ wydaje się nam prawdziwem; tymczasem jeśli w niem zastąpimy $\frac{2}{4}$ przez $\frac{1}{2}$, otrzymamy zdanie niewątpliwie fałszywe. Można temu, oczywiście, przeciwstawić rozmaite argumenty; to też my, nie przesądzając samej kwestji, podaliśmy ten przykład tylko dla pokazania, że istnieją tutaj poważniejsze trudności. Z drugiej strony wszakże trzeba przyznać, że w równaniach arytmetycznych można bez obawy podstawiać równe za równe. W każdym razie, przez wspomniane postawienie kwestji, Grassmann ogromnie sobie ułatwił zadanie. Dzięki temu bowiem, dowody twierdzeń sprowadzają się, u niego, do prostych rachunków. Lewa strona pozostaje niezmienną, natomiast przekształca się prawą. W nawiasie, obok każdej równości, podane są twierdzenia i definicje, na które się powołujemy.

Dowód twierdzenia 1. jest indukcyjny ze względu na $c$. Sprawdzamy więc najpierw twierdzenie dla

$$c = 1;$$

istotnie ono zachodzi, gdyż wówczas przybiera postać definicji dodawania ($I$). Zakładamy teraz, iż twierdzenie zachodzi dla jakiejś wartości na $c$, t. j., że mamy:

$$a + (b + c) = (a + b) + c; \qquad \text{(H)}$$

chcemy udowodnić, że zachodzi wówczas także dla $c + 1$, t. j., że mamy:

$$a + [b + (c + 1)] = (a + b) + (c + 1).$$

W rzeczy samej:

$$\begin{aligned} a + [b + (c + 1)] &= a + [(b + c) + 1] && \text{(I)} \\ &= [a + (b + c)] + 1 && \text{(I)} \\ &= [(a + b) + c] + 1 && \text{(H)} \\ &= (a + b) + (c + 1) && \text{(I)} \end{aligned}$$

Powołujemy się tutaj tylko na definicję dodawania (I) i na nasze założenie (H). Jeżeli zatem nasze twierdzenie zachodzi dla jakiegoś $c$, to zachodzi także dla $c + 1$. Wobec tego zachodzi ono dla każdego $c$.

Zwracamy się teraz do dowodu twierdzenia 2. Będzie on indukcyjnym ze względu na $a$. Upewniamy się więc najpierw, że twierdzenie zachodzi dla

$$a = 1;$$

istotnie, mamy wówczas, po obu stronach znaku równości, sumę $1 + 1$. Zakładamy więc, że, dla jakiejś wartości na $a$, mamy:

$$a + 1 = 1 + a; \qquad \text{(H)}$$

chcemy udowodnić, że wówczas jest także:

$$(a + 1) + 1 = 1 + (a + 1).$$

W rzeczy samej,

$$\begin{aligned} (a + 1) + 1 &= (1 + a) + 1 && \text{(H)} \\ &= 1 + (a + 1) && \text{(I)} \end{aligned}$$

Jeżeli więc twierdzenie nasze sprawdza się dla jakiegoś $a$, to sprawdza się ono także dla $a + 1$; wobec tego sprawdza się ono dla każdego $a$.

Pozostaje jeszcze do udowodnienia twierdzenie 3. Ponieważ już uzasadniliśmy twierdzenia 1. i 2., możemy się na nie teraz powoływać. Dowód twierdzenia 3., jest indukcyjny ze względu na $b$. Stwierdzamy więc najpierw, iż sprawdza się ono dla

$$b = 1;$$

wówczas bowiem nie różni się ono od twierdzenia 2. Zakładamy więc teraz, że, dla jakiegoś $b$ jest:

$$a + b = b + a; \tag{H}$$

chcemy udowodnić, że, w takim razie jest również

$$a + (b + 1) = (b + 1) + a.$$

W rzeczy samej,

$$\begin{aligned} a + (b + 1) &= (a + b) + 1 && \text{(I)} \\ &= (b + a) + 1 && \text{(H)} \\ &= b + (a + 1) && \text{(I)} \\ &= b + (1 + a) && \text{(2)} \\ &= (b + 1) + a. && \text{(1)} \end{aligned}$$

Jeżeli więc twierdzenie zachodzi dla jakiegoś $b$, to zachodzi ono również dla $b + 1$; wobec tego zachodzi ono dla każdego $b$.

Te przykłady wystarczają, aby dać pojęcie, w jaki sposób można, opierając się na zasadzie indukcji, uzasadnić ściśle teorję liczb całkowitych.

ROZDZIAŁ XI.

# O błędach w rozumowaniu.

Błędami w rozumowaniu zajmowano się bardzo wiele od chwili powstania logiki. Już Arystotoles poświęca im osobne dziełko p. t. „O dowodach sofistycznych"; dzisiaj w każdym niemal podręczniku logiki znajduje się obszerny rozdział, traktujący o błędach w dowodzeniu. Możemy więc tutaj ograniczyć się do podania niektórych tylko wskazówek. W każdem rozumowaniu mamy do czynienia: 1° z tezą, 2° z przesłankami, 3° z wnioskowaniem. Mogą tedy być błędy: 1° w tezie, 2° w przesłankach, 3° we wnioskowaniu.

Błąd w tezie nazywa się ignoratio elenchi (zatracenie wątku) i polega na tem, że się dowodzi czegoś innego niż to, czego się miało dowieść. N. p. zamiast udowodnić, że jakaś liczba jest dodatnia, dowodzimy, iż jest nieujemna, tymczasem ona może być zerem.

Baczną uwagę należy zwracać na błędy w przesłankach. Wskazuje na to już nazwa łacińska: error fundamentalis (błąd podstawowy). Jeden z najbardziej rozpowszechnionych błędów tej kategorji nosi nazwę: a dicto secundum quid, ad dictum simpliciter. Błąd ów polega na tem, że od czegoś, co jest prawdą pod pewnemi warunkami, przechodzi się do tego samego bez tych warunków. To znaczy, że, przy powoływaniu się na jakieś twierdzenie, zapominamy o warunkach, pod któremi ono zachodzi. Tak n. p., powołując się na twierdzenie, podług którego iloczyn jest większy od mnożnej, powiadamy, iż

$$2 \times \tfrac{1}{2} > 2 \text{ t. j. } 1 > 2.$$

Błąd pochodzi, oczywiście stąd, że, przy powoływaniu się na twierdzenie, zapomnieliśmy o warunku, by mnożnik był większym od jedności. Omyłka taka łatwo może się wślizgnąć, jeżeli przyzwyczailiśmy się mnożyć przez liczby większe od jedności.

A oto drugi przykład: Ponieważ, powiadamy, jest:

$$xa = x . b . \supset . a = b,$$

a z drugiej strony,

$$2 \times 0 = 1 \times 0,$$

zatem:

$$2 = 1.$$

Tu znowu opuściliśmy warunek:

$$x \neq 0.$$

Błędu tego, w postaci tak prostej, nie popełnimy; ale, jeżeli mnożymy przez jakieś zawiłe wyrażenie algebraiczne, to możemy z łatwością zapomnieć o sprawdzeniu, iż wyrażenie to nie jest zerem.

Podobnych błędów możnaby przytoczyć bardzo wiele. Twierdzenia matematyczne mają postać zdań warunkowych; jeżeli tedy przy stosowaniu jakiegoś twierdzenia matematycznego, zapominamy o którymś warunku, zawartym w poprzedniku, to zastosowanie może się okazać fałszywem. Dawniej bardzo często nie znano dokładnie warunków, pod któremi zachodziły twierdzenia. Mimo to, w matematyce błędy były względnie rzadkie. Abel w jednym ze swych listów zastanawia się nad tem, dlaczego przed pracami Cauchy'egó i Bolzano'a, stosując twierdzenia naoślep, t. j. bez sprawdzania ich warunków, popełniano jednak stosunkowo tak mało błędów? Odpowiedź jest bardzo prosta: jeżeli pominięty warunek w rzeczywistości zachodzi, to zastosowanie twierdzenia nie prowadzi do błędu. Otóż w owych czasach miano do czynienia głównie z funkcjami analitycznemi, przeważnie czyniącemi zadość warunkom, które pomijano.

I dziś zresztą wiele osób nie zdaje sobie dokładnie sprawy z warunków, pod któremi zachodzą niektóre twierdzenia. Tak n. p. z nierówności:

$$\begin{cases} -1 > -2 \\ 3 > 1 \end{cases}$$

niejeden byłby skłonnym, przez mnożenie stronami, wyciągnąć wniosek:

$$-3 > -2.$$

Powinny być wymienione warunki, pod którymi zachodzi twierdzenie o mnożeniu stronami nierówności:

$$a > b . c > d . \supset . ac > bd.$$

Zwykle mówi się, że liczby $a$, $b$, $c$, $d$ mają być dodatnie; tymczasem warunek konieczny i dostateczny jest inny: Oto. z tych liczb mają być przynajmniej trzy dodatnie, lub, przy dwóch tylko dodatnich, jedna ma być zerem.

Wspominaliśmy już o tem (w rozdziale III.), że punktem wyjścia dla Peano'a w jego pracach nad logiką i stworzeniem ideografji była właśnie chęć uniknięcia tego błędu w matematyce przez dokładne formułowanie twierdzeń. Pismo pojęciowe, które on stworzył, jest dość trudne i zawiłe, poniekąd nawet, w porównaniu z mową potoczną, niedołężne, ale co do ścisłości jedyne. Jeżeli chcemy zupełnie ściśle się wyrażać i najlepiej zabezpieczyć przed błędami, powinniśmy używać takiej symboliki. Może być, że, aby uczynić posługiwanie się ideografją łatwiejszem, byłoby dobrze uczyć jej od dzieciństwa. Kto wie, czy w takim razie, nie zbliżyłaby się ona bardziej do nas?

Inna kategorja błędów w przesłankach nosi nazwę petitio principii. Ma ona miejsce jeżeli, mając dowieść jakiegoś zdania $p$ na podstawie pewnych założeń i mając, na podstawie tychże założeń, związek

$$p = q,$$

w dowodzie zdania $p$ powołujemy się na $q$ a w dowodzie $q$ powołujemy się na $p$. Poza matematyką, błąd ten jest bardzo częstym.

Szczególny przypadek petitionis principii stanowi circulus vitiosus, błędne koło. Z błędnem kołem mamy do czynienia, jeśli zdaniem $q$ jest samo $p$, t. j. w dowodzie twierdzenia posługujemy się tą samą tezą, którą mamy uzasadnić.

Za przykład petitionis principii służyć mogą nadzwyczaj liczne dowody, które, zaczynając od chwili pojawienia się „Elementów" Euklidesa, były podawane i, niestety, są dotychczas przez ludzi nieobeznanych z przedmiotem, podawane dla postulatu Euklidesa o linjach równoległych *). Niektóre z tych dowodów przyjmują za rzecz oczywistą istnienie figur podobnych, inne — istnienie kwadratu, jeszcze inne — to, iż wewnątrz kąta wypukłego nie może być poprowadzona prosta, nie przecinająca żadnego z jego boków i t. d. Wszystko to są petitiones principii, bo przyjąć którekolwiek z tych założeń, to znaczy przyjąć postulat Euklidesa.

Ciekawym przykładem petitionis principii jest także często

*) W sprawie tego postulatu por. odnośne ustępy w rozdziałach III. i X.

podawany dowód kontrapozycji przy pomocy reductio ad absurdum, która sama, dla swego uzasadnienia, wymaga kontrapozycji. Twierdzenie o kontrapozycji, jak wiadomo, ma postać:

$$p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p.$$

W dowodzie tego twierdzenia przyjmuje się:

$$p \supset q \text{ i } \sim q,$$

i na tej podstawie wykazuje się, że jest

$$\sim p.$$

Stosując w tym celu reductio ad absurdum, zakłada się $\sim(\sim p)$, t. j. $p$. Ale z $p$ wynika $q$; mamy więc $q$, co przeczy założeniu $\sim q$. Musi być zatem $\sim q$. Ale uzasadnienie redukcji ad absurdum opiera się na kontrapozycji. W rzeczy samej, jak wiemy, metoda ta polega na tem, że, chcąc uzasadnić jakieś twierdzenie $p$, dowodzimy wynikania

$$\sim p \supset q,$$

gdzie $q$ jest zdanie, o którem już wiemy, iż jest fałszywem. Powiadamy, że wobec tego, nie może być $\sim p$, więc musi być $p$. Dlaczego? Oto, przez kontrapozycję mamy z powyższego wynikania

$$\sim q \supset \sim(\sim p), \text{ t. j. } \sim q \supset p;$$

ponieważ zaś fałszem jest $q$, a więc prawdą jest $\sim q$. a zatem i $p$, c. b. d. o.

Zwracamy się nakoniec do błędów we wnioskowaniu. Niemi to przeważnie zajmuje się logika. Ona bowiem podaje pewne kanony, podług których wolno nam wnioskować; jeżeli od nich odstępujemy, to popełniamy błąd we wnioskowaniu. Taki błąd popełniamy n. p., wnioskując podług nieważnego trybu syllogistycznego $(AE)_1$ lub $(AA)_2$; na podstawie zdania

*SAP*,

twierdząc

*PAS*;

z fałszywości poprzednika wnioskując o fałszywości następnika zdania warunkowego lub z prawdziwości następnika wnioskując o prawdziwości poprzednika i t. d.

## ROZDZIAŁ XII.

# O dowodzie zupełnym.

Powracając, na zakończenie pierwszej części niniejszego dzieła, do pojęcia dowodu, pragniemy najpierw uzupełnić wybór dowodów bez przesłanek logicznych dowodami twierdzeń, których zazwyczaj dowodzi się przez reductio ad absurdum, tudzież twierdzeń, nie mających postaci zdań warunkowych. Za pierwszy przykład posłuży nam dowód twierdzenia następującego: Jeżeli $a$ jest liczbą dodatnią, a $b$ — liczbą rzeczywistą, to nierówność

$$a^2 > b^2$$

pociąga za sobą:

$$a > b.$$

Matematyk poda nam ten dowód w dwóch słowach: Jest

$$a > b,$$

bo, gdyby było

$$a = b \text{ albo } a < b,$$

to byłoby odpowiednio:

$$a^2 = b^2 \text{ albo } a^2 < b^2,$$

co przeczy założeniu:

$$a^2 > b^2.$$

Że krótko, nie przeczymy, ale czy jasno? Uczeń gimnazjalny, który dopiero co zaznajomił się z algebrą, odpowie bez wahania, że to jest zupełnie jasne. Ale nauczyciel może go łatwo złapać, jeżeli postawi pytanie tak: nie korzystałeś w swoim dowodzie z założenia, iż $a$ jest liczbą dodatnią, a więc dowód stosuje się i do liczb ujemnych; wobec tego, stąd, że jest

$$(-2)^2 > 1^2$$

można wyciągnąć wniosek, że jest:

$$-2 > 1.$$

W istocie korzystaliśmy z warunku, by $a$ było dodatniem, gdyż powoływaliśmy się na to, że, gdyby było

$$a < b,$$

to byłoby

$$a^2 < b^2,$$

co może być błędnem, gdyby $a$ było liczbą ujemną. Nie jest więc w tym dowodzie uwidocznionem znaczenie jednego z warunków, pod któremi twierdzenie zachodzi.

Aby podać dowód zupełny twierdzenia, musimy wyszczególnić wszystkie przesłanki, z których będziemy korzystali. Bez tego zadanie, które przecież polega na ustanowieniu związku logicznego, byłoby właściwie nieokreślonem. W systematycznym wykładzie nauki tego niema, ponieważ za podstawy dowodu służą wszystkie postulaty, definicje i poprzednio uzasadnione twierdzenia; ale tutaj musimy szczegółowo wymienić wszystkie podstawy dowodu. Otóż dowód nasz będzie się opierał na następujących siedmiu przesłankach:

1. $a \varepsilon p . \supset . a \varepsilon q,$
2. $a \varepsilon q . b \varepsilon q . a > b . \supset . \sim (a = b),$
3. $a \varepsilon q . b \varepsilon q . a > b . \supset . \sim (a < b),$
4. $a \varepsilon q . b \varepsilon q . \sim (a = b) . \sim (a < b) . \supset . a > b,$
5. $a \varepsilon q . \supset . a^2 \varepsilon q,$
6. $a \varepsilon q . b \varepsilon q . a = b . \supset . a^2 = b^2,$
7. $a \varepsilon p . b \varepsilon q . a < b . \supset . a^2 < b^2.$

Symbol $q$ oznacza tutaj, jak zwykle, liczbę rzeczywistą, symbol zaś $p$ — liczbę dodatnią. W tej samej symbolice, twierdzenie nasze wyrazi się wzorem następującym:

$$a \varepsilon p . b \varepsilon q . a^2 > b^2 . \supset . a > b.$$

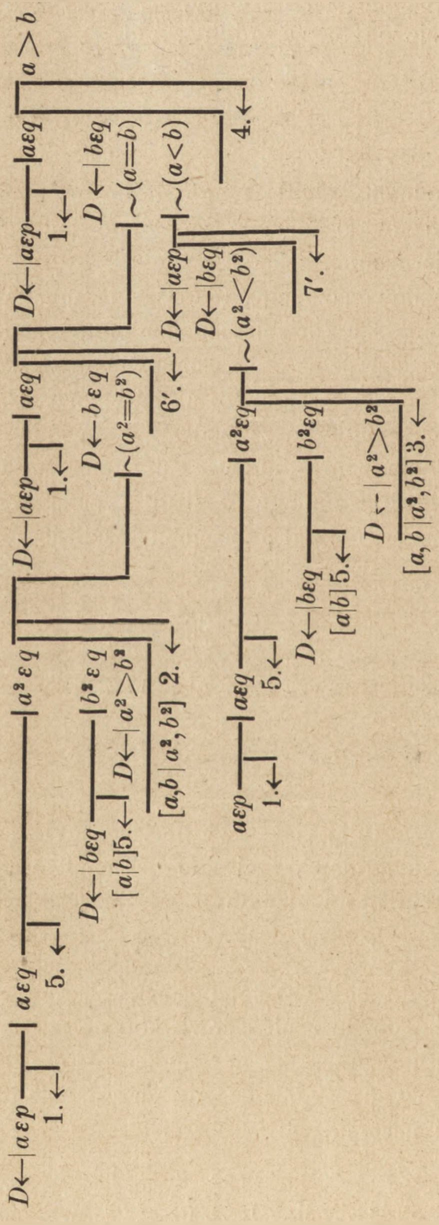
Ale przesłanki nasze w tej postaci, w jakiej je podaliśmy, nie byłyby przydatne do naszych celów. Musimy dwie z nich, mianowicie dwie ostatnie, przekształcić zapomocą kontrapozycji uogólnionej, czyli transpozycji. Zamiast tedy przesłanek 6. i 7., będziemy mieli przesłanki następujące:

6'. $a \varepsilon q . b \varepsilon q . \sim (a^2 = b^2) . \supset . \sim (a = b).$

7'. $a \varepsilon p . b \varepsilon q . \sim (a^2 < b^2) . \supset . \sim (a < b).$

To właśnie przekształcenie przesłanek zastępuje reductio ad absurdum.

Sam schemat redukcyjny naszego dowodu będzie następujący:



Przypominamy, iż litery, użyte w dowodzie nie oznaczają tego samego, co w wypowiedzi twierdzenia i w przesłankach, albowiem w dowodzie zastępujemy zmienne przez dowolne stałe, spełniające poprzednik twierdzenia, którego dowodzimy. W rozdziale pierwszym zaznaczyliśmy to wyraźnie, używając w dowodzie innych liter, niż w wypowiedzi twierdzenia. Obecnie jednak uważamy rzecz za wyjaśnioną na tyle, iż możemy tego zaniechać, nie wywołując przez to nieporozumień.

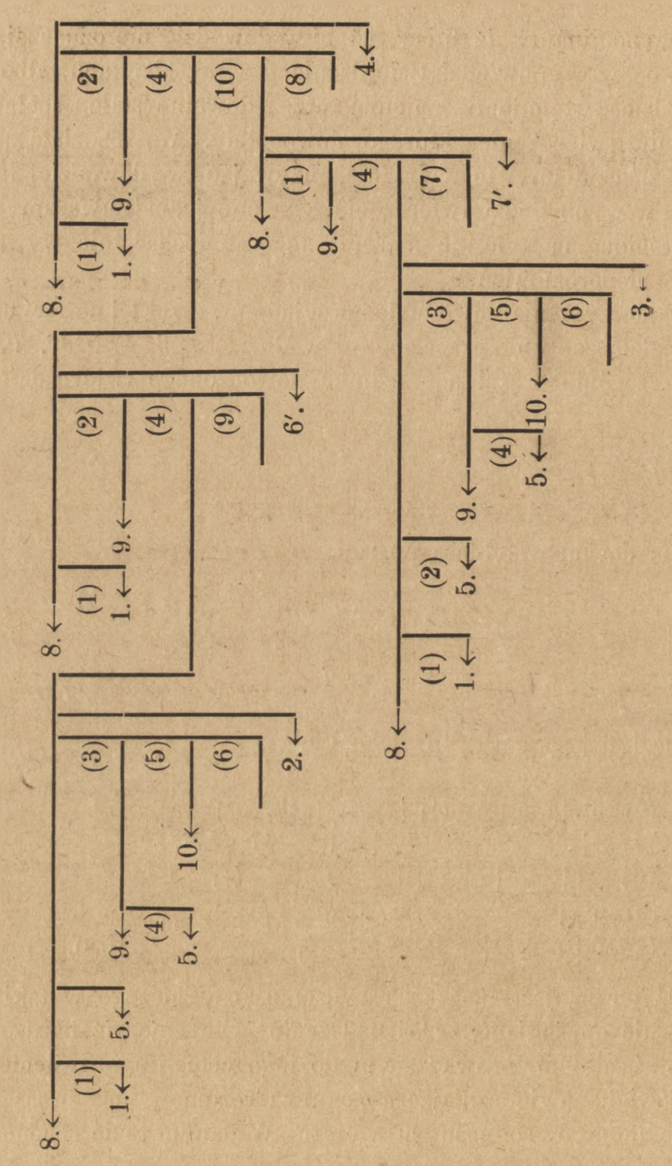
Dla otrzymania dowodu dedukcyjnego w zwykłej postaci układu wierszy, dołączamy do przesłanek dowodu, 1, 2, 3, 4, 5, 6', 7', jeszcze poszczególne części poprzednika dowodzonego twierdzenia:

8. $a \varepsilon p$,
9. $b \varepsilon q$,
10. $a^2 > b^2$.

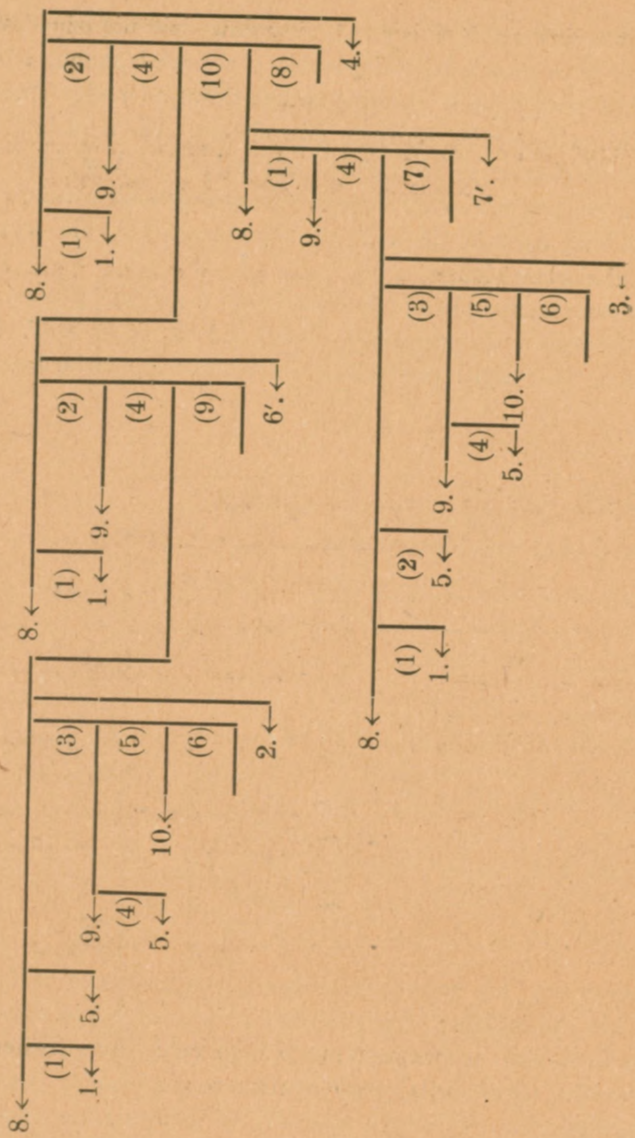
Wówczas dowód przybiera postać:

$8. \quad | \longrightarrow a \varepsilon p$ (1)
$(1) . 1 . | \longrightarrow a \varepsilon q$ (2)
$(2) . 5 . | \longrightarrow a^2 \varepsilon q$ (3)
$9. \quad | \longrightarrow b \varepsilon q$ (4)
$(4) . 5 . [a \mid b] \, | \longrightarrow b^2 \varepsilon q$ (5)
$10. \quad | \longrightarrow a^2 > b^2$ (6)
$(3) . (5) . (6) . 3 . [a, b \mid a^2, b^2] \, | \!\rightarrow \sim (a^2 < b^2)$ (7)
$(1) . (4) . (7) . 7' . | \longrightarrow \sim (a < b)$ (8)
$(3) . (5) . (6) . 2 . [a, b \mid a^2, b^2] \, | \!\rightarrow \sim (a^2 = b^2)$ (9)
$(2) . (4) . (9) . 6' . | \longrightarrow \sim (a = b)$ (10)
$(2) . (4) . (10) . (8) . 4 . | \longrightarrow a > b$, c. b. d. o.

Użyteczną jest rzeczą sprawdzenie, czy niczego w takim dowodzie nie opuściliśmy. Doświadczenie wykazuje, iż bardzo skutecznym środkiem, prowadzącym do tego celu, jest skreślenie schematu dowodu, uwidoczniającego ogniwa rozumowania, przez wskazywanie numerów odnośnych wierszy. W danym razie schemat taki ma postać następującą:



Widzimy na tym schemacie, że wszystkie przesłanki zostały wykorzystane, że niema luk w dowodzie i że ostatnie ogniwo redukcji sprowadza się wszędzie do przesłanek: 8, 9, 10, t. j. do poprzednika naszego twierdzenia.



Widzimy na tym schemacie, że wszystkie przesłanki zostały wykorzystane, że niema luk w dowodzie i że ostatnie ogniwo redukcji sprowadza się wszędzie do przesłanek: 8, 9, 10, t. j. do poprzednika naszego twierdzenia.

Za przykład twierdzenia, nie mającego postaci zdania warunkowego, mogłaby służyć równość

$$2 + 2 = 4.$$

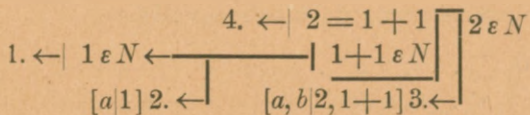
Dowód byłby jednak stosunkowo dość długim; weźmiemy więc prostszy przykład: twierdzenie, że *2* jest liczbą naturalną,

$$2 \varepsilon N$$

($N$ oznacza liczbę naturalną). Przesłanki, w liczbie czterech będą następujące:

1. $1 \varepsilon N$,
2. $a \varepsilon N . \supset . a + 1 \varepsilon N$,
3. $a = b . b \varepsilon N . \supset . a \varepsilon N$,
4. $2 = 1 + 1$.

Dowód redukcyjny ma postać następującą:




Odtworzenie tego samego dowodu w postaci dedukcyjnej nie przedstawia żadnych trudności.

W powyższym dowodzie widać odmienną rolę przesłanek nie mających postaci zdań warunkowych. Tylko przesłanki, mające postać zdań warunkowych tworzą ogniwa dowodu; tamte zaś służą za punkty wyjścia, za poprzedniki, podobnie, jak w poprzednich dowodach poszczególne części poprzednika dowodzonego twierdzenia.

Twierdzenie może także mieć postać alternatywy. Za przykład takiego twierdzenia posłuży nam twierdzenie następujące:

$$a \leqslant |a|, \text{ t. j. } a = |a| . \vee . a < |a|,$$

gdzie $a$ oznacza liczbę rzeczywistą. Potrzebne do dowodu przesłanki matematyczne są w liczbie dwóch, mianowicie:

1. $\sim (a < 0) . \supset . a = |a|$,
2. $a < 0 . \supset . a < |a|$.

Aby, na podstawie tych przesłanek, przeprowadzić dowód powyższego twierdzenia, musimy: albo przekształcić wypowiedź twierdzenia i jedną z przesłanek, albo wprowadzić do dowodu przesłanki logiczne.

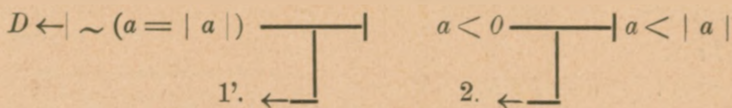
W pierwszym przypadku, nadajemy naszemu twierdzeniu postać następującą:

$$\sim (a = |a|) . \supset . a < |a| ,$$

oczywiście równoważną poprzedniej. Nadto, do przesłanki 1., stosujemy kontrapozycję i dostajemy przesłankę:

1'. $\sim (a = |a|) . \supset . a < 0.$

Dowód redukcyjny jest wówczas następujący:




Ale, jeżeli nie zechcemy przekształcać twierdzenia i przesłanek poza tabelą dowodu, to dowód, prawdziwy dowód zupełny, w porządku dedukcyjnym będzie taki: Wnosimy najpierw obie przesłanki matematyczne do tabeli dowodu.

1. $|\!\rightarrow a < 0 . \supset . a < |a| ,$ (1)
2. $|\!\rightarrow \sim (a < 0) . \supset . a = |a| ,$ (2)

przyczem $a$ interpretujemy nie jako zmienną, ale, tak, jak w poprzednich dowodach jako stałą dowolną. Stosujemy następnie znaną nam przesłankę logiczną o dodawaniu stronami zdań warunkowych:

*Dod.* $p \supset q . r \supset s . \supset : p \vee r . \supset . q \vee s,$

podstawiając za $p$, $q$, $r$, $s$ odpowiednio:

$$a < 0 , a < |a| , \sim (a < 0) , a = |a| .$$

Mamy tedy pierwsze ogniwo dowodu:

(1).(2).*Dod.* $|\!\rightarrow a < 0 . \vee . \sim (a < 0) : \supset : a < |a| . \vee . a = |a|$ (3)

Skorzystamy teraz z przesłanki logicznej, którą oznaczymy literą $L$:

*L.* $p \vee \sim p.$

Przesłankę tę, po podstawieniu

$$a < 0$$

zamiast $p$, wciągamy do tabeli dowodu:

$L\ |\!\rightarrow$ $a < 0 \vee \sim (a < 0)$ (4)

Mamy obecnie, we wierszu. (3), pewne zdanie warunkowe we wierszu zaś (4) — jego poprzednik. Możemy więc, stosując modus ponens,

otrzymać stąd następnik powyższego zdania warunkowego. Zauważyć jednak należy, iż dotąd stosowaliśmy modus ponens tylko w ten sposób, że mieliśmy wśród przesłanek pewne zdanie warunkowe a w tabelce dowodu jego poprzednik; wnosiliśmy stąd, że zachodzi następnik. Tym razem jednak, to zdanie warunkowe znajduje się w tabelce dowodu, a nie wśród przesłanek. Stąd pewna trudność formalna. Radzimy sobie w ten sposób, że stosujemy modus ponens jako przesłankę, t. j. przesłankę następującą:

*M. P.* $\quad p \,.\, p \supset q \,:\supset .\, q,$

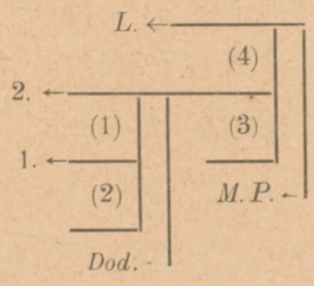
podstawiając za $p$ i $q$ oba człony rozważanego zdania warunkowego. Stwierdzamy, iż zachodzi poprzednik tej przesłanki i, zapomocą modus ponens jako sposobu wnioskowania, otrzymujemy to, o co nam chodziło. Podstawiając więc za $p$ i $q$ odpowiednio:

$$a < 0 \,.\vee .\, \sim (a < 0) \quad \text{oraz} \quad a < |a| \,.\vee .\, a = |a|,$$

otrzymujemy końcowe ogniwo naszego dowodu:

(4) . (3) *M . P.* $\rightarrow a < |a| \,.\vee .\, a = |a|,$

Schemat powyższego dowodu jest następujący:




W poprzednio podawanych dowodach twierdzeń, mających postać zdań warunkowych, unikaliśmy wprowadzenia przesłanek logicznych przez dołączanie do spisu przesłanek poszczególnych części poprzednika dowodzonego twierdzenia, a nadto przez uprzednie przekształcenie przesłanek, lub nawet samego twierdzenia. W rzeczywistości, przesłanki logiczne były, ale poza tabelą dowodu. Dochodziliśmy właściwie do innego twierdzenia, niż to, które mieliśmy udowodnić, bo tylko do jego następnika, i wychodziliśmy z innych przesłanek, niż to zapowiadaliśmy. Dowodów tych nie można zatem

otrzymać stąd następnik powyższego zdania warunkowego. Zauważyć jednak należy, iż dotąd stosowaliśmy modus ponens tylko w ten sposób, że mieliśmy wśród przesłanek pewne zdanie warunkowe a w tabelce dowodu jego poprzednik; wnosiliśmy stąd, że zachodzi następnik. Tym razem jednak, to zdanie warunkowe znajduje się w tabelce dowodu, a nie wśród przesłanek. Stąd pewna trudność formalna. Radzimy sobie w ten sposób, że stosujemy modus ponens jako przesłankę, t. j. przesłankę następującą:

*M. P.* $p . p \supset q : \supset . q$,

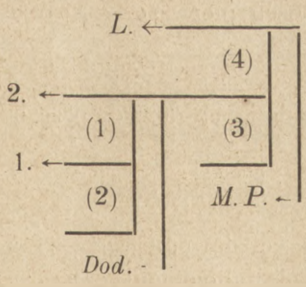
podstawiając za $p$ i $q$ oba człony rozważanego zdania warunkowego. Stwierdzamy, iż zachodzi poprzednik tej przesłanki i, zapomocą modus ponens jako sposobu wnioskowania, otrzymujemy to, o co nam chodziło. Podstawiając więc za $p$ i $q$ odpowiednio:

$$a < 0 . \vee . \sim (a < 0) \quad \text{oraz} \quad a < |a| . \vee . a = |a| ,$$

otrzymujemy końcowe ogniwo naszego dowodu:

(4) . (3) $M . P. \mid\!\rightarrow a < |a| . \vee . a = |a|$,

Schemat powyższego dowodu jest następujący:




W poprzednio podawanych dowodach twierdzeń, mających postać zdań warunkowych, unikaliśmy wprowadzenia przesłanek logicznych przez dołączanie do spisu przesłanek poszczególnych części poprzednika dowodzonego twierdzenia, a nadto przez uprzednie przekształcenie przesłanek, lub nawet samego twierdzenia. W rzeczywistości, przesłanki logiczne były, ale poza tabelą dowodu. Dochodziliśmy właściwie do innego twierdzenia, niż to, które mieliśmy udowodnić, bo tylko do jego następnika, i wychodziliśmy z innych przesłanek, niż to zapowiadaliśmy. Dowodów tych nie można zatem

uważać za dowody zupełne. Powróćmy więc do tych twierdzeń, których dowody przedtem podaliśmy, i zobaczmy, jak będą wyglądały dowody zupełne:

Zwracamy się najpierw do wywodu twierdzenia:

$$aRb \,.\, bRc \,.\, cRd \,.\supset .\, aRd$$

z przesłanki:

1. $$aRb \,.\, bRc \,.\supset .\, aRc$$

w dowodzie tym znowuż, tak, jak we wszystkich dowodach, zamieniamy zmienne $a$, $b$, $c$, $d$ na dowolne stałe. Wnosimy najpierw tę przesłankę do tabeli dowodu:

1 . $\vdash\!\rightarrow aRb \,.\, bRc \,.\supset .\, aRc$ (1)

Następnie stosujemy do niej jedno z twierdzeń logicznych, które ogólnie oznaczać będziemy nazwą twierdzeń o mnożeniu ($Mn$.), a mianowicie:

$$p \supset q \,.\supset : p \,.\, r \,.\supset .\, q \,.\, r \quad ,$$

przy podstawieniu za $p$, $q$, $r$ odpowiednio

$$aRb \,.\, bRc \quad ; \quad aRc \quad ; \quad cRd;$$

otrzymujemy w ten sposób pierwsze ogniwo dowodu:

(1) . $Mn$ . $\vdash\!\rightarrow aRb \,.\, bRc \,.\, cRd \,.\supset .\, aRc \,.\, cRd$ (2)

Dalej, wciągamy znowu do tabeli dowodu przesłankę 1., ale z pewnem podstawieniem:

1 . $[b, c \mid c, d]$ $\vdash\!\rightarrow aRc \,.\, cRd \,.\supset .\, aRd$ (3)

Drugie i ostatnie ogniwo dowodu wytwarzamy zapomocą znanej nam przesłanki logicznej, syllogizmu

$$p \supset q \,.\, q \supset r \,.\supset .\, p \supset r,$$

z podstawieniem na miejsce $p$, $q$, i $r$, odpowiednio:

$$aRb \,.\, bRc \,.\, cRd \quad ; \quad aRc \,.\, cRd \quad ; \quad aRd:$$

otrzymujemy tedy:

(2) . (3) . $Syl$ . $\vdash\!\rightarrow aRb \,.\, bRc \,.\, cRd \,.\supset .\, aRd$ , c . b . d . o.

Ale nie ograniczymy się do tego najprostszego przykładu; podamy cokolwiek zawilsze. Pierwszym przykładem takim będzie

dowód rozpatrywanego już przez nas twierdzenia, wyrażającego się wzorem:

$$a\varepsilon p \,.\, b\varepsilon q \,.\, a^2 > b^2 \,.\supset.\, a > b.$$

Przesłanki matematyczne będą te same, co przedtem (zob. na początku niniejszego rozdziału); przesłanek tych jednak nie przekształcamy przed rozpoczęciem dowodu. Rozpoczynamy dowód przez wciągnięcie do tabeli przesłanek: 1. i 5. Mamy więc:

1. $\vdash\!\!\longrightarrow a\varepsilon p \,.\supset.\, a\varepsilon q$ (1)
5. $\vdash\!\!\longrightarrow a\varepsilon q \,.\supset.\, a^2\varepsilon q$ (2)

Przez zastosowanie syllogizmu wytwarzamy pierwsze ogniwo dowodu:

(1) . (2) . $Syl$ . $|\!\rightarrow a\varepsilon p \,.\supset.\, a^2\varepsilon q$ (3)

Wnosimy następnie przesłankę 5., tym razem jednak z podstawieniem:

5 . $[a \mid b]$ $|\!\rightarrow$ $b\varepsilon q \,.\supset.\, b^2\varepsilon q$ (4)

Przez zastosowanie następującego twierdzenia o mnożeniu:

$$p \supset q \,.\, r \supset s \,.\supset:\, p \,.\, r \,.\supset.\, q \,.\, s$$

przy podstawieniu, za $p$, $q$, $r$, $s$, odpowiednio:

$$a\varepsilon p,\ a^2\varepsilon q,\ b\varepsilon q,\ b^2\varepsilon q,$$

otrzymujemy:

(3) . (4) . $Mn$ . $|\!\rightarrow a\varepsilon p \,.\, b\varepsilon q \,.\supset.\, a^2\varepsilon q \,.\, b^2\varepsilon q.$ (5)

Posługując się innem twierdzeniem o mnożeniu, które już gdzieindziej stosowaliśmy, mianowicie:

$$p \supset q \,.\supset:\, p \,.\, r \,.\supset.\, q \,.\, r,$$

przy podstawieniu za $p$, $q$, $r$, odpowiednio:

$$a\varepsilon p \,.\, b\varepsilon q \,;\, a^2\varepsilon q \,.\, b^2\varepsilon q \,;\, a^2 > b^2,$$

otrzymujemy:

(5) . $Mn$ . $|\!\rightarrow a\varepsilon p \,.\, b\varepsilon q \,.\, a^2 > b^2 \,.\supset.\, a^2\varepsilon q \,.\, b^2\varepsilon q \,.\, a^2 > b^2$ (6)

Wnosimy teraz, z odpowiedniem podstawieniem, przesłanki: 2. i 3:

2. $[a\ b \mid a^2, b^2]$ $|\!\rightarrow a^2\varepsilon q \,.\, b^2\varepsilon q \,.\, a^2 > b^2 \,.\supset.\, \sim (a^2 = b^2)$ (7)
3. $[a, b \mid a^2, b^2]$ $|\!\rightarrow a^2\varepsilon q \,.\, b^2\varepsilon q \,.\, a^2 > b^2 \,.\supset.\, \sim (a^2 < b^2)$ (8)

Mnożąc stronami te dwa wiersze, tak, jak to uczyniliśmy z wierszami (3) i (4) dla otrzymania wiersza (5), otrzymujemy:

$(7).(8).. Mn . \vdash a^2 \varepsilon q . b^2 \varepsilon q . a^2 > b^2 . \supset . \sim (a^2 = b^2) . \sim (a^2 < b^2)$ (9)

W wierszach: (7) i (8) poprzednik jest ten sam; nie powtarzamy go zatem dwa razy. Z zastosowania syllogizmu do wierszy (6) i (9), mamy:

$(6).(9). Syl . \vdash a \varepsilon p . b \varepsilon q . a^2 > b^2 . \supset . \sim (a^2 = b^2) . \sim (a^2 < b^2)$ (10)

Stosując znowu twierdzenie o mnożeniu:

$$p \supset q . \supset : p . r . \supset . q . r,$$

przy podstawieniu za $p$, $q$, $r$, odpowiednio:

$$a \varepsilon p . b \varepsilon q . a^2 > b^2 ; \sim (a^2 = b^2) . \sim (a^2 < b^2) ; a \varepsilon p . b \varepsilon q,$$

dostajemy:

$(10). Mn. \vdash a \varepsilon p . b \varepsilon q . a^2 > b^2 . \supset . a \varepsilon p . b \varepsilon q . \sim (a^2 = b^2) . \sim (a^2 < b^2)$ (11)

Stosując to samo twierdzenie o mnożeniu, przy podstawieniu, za $p$, $q$, $r$, odpowiednio:

$$a \varepsilon p ; a \varepsilon q ; a \varepsilon p . b \varepsilon q . \sim (a^2 = b^2) . \sim (a^2 > b^2),$$

dostajemy dalej:

$(1). Mn . \vdash a \varepsilon p . b \varepsilon q . \sim (a^2 = b^2) . \sim (a^2 < b^2) . \supset$
$\supset . a \varepsilon p . a \varepsilon q . b \varepsilon q . \sim (a^2 = b^2) . \sim (a^2 < b^2)$ (12)

Wnosząc zaś przesłankę 6.:

$6. \vdash a \varepsilon q . b \varepsilon q . a = b . \supset . a^2 = b^2$ (13)

i dokonując na niej transpozycji, otrzymujemy:

$(13)\ Tr. \vdash a \varepsilon q . b \varepsilon q . \sim (a^2 = b^2) . \supset . \sim (a = b)$ (14)

Podobnie postępując z przesłanką 7, tworzymy następne dwa wiersze:

$7 . \vdash a \varepsilon p . b \varepsilon q . a < b . \supset . a^2 < b^2$ (15)
$(15). Tr. \vdash a \varepsilon p . b \varepsilon q . \sim (a^2 < b^2) . \supset . \sim (a < b)$ (16)

Mnożąc stronami wiersze: (14) i (16), dostajemy:

$(14).(16). Mn \vdash a \varepsilon p . a \varepsilon q . b \varepsilon q . \sim (a^2 = b^2) . \sim (a^2 < b^2) . \supset$
$\supset . \sim (a = b) . \sim (a < b)$ (17)

Mnożąc to wynikanie obustronnie przez:

$$a\varepsilon q \,.\, b\varepsilon q,$$

dostajemy:

$$(17) \,.\, Mn \;|\!\rightarrow a\varepsilon p \,.\, a\varepsilon q \,.\, b\varepsilon q \,.\, \sim(a^2 = b^2) \,.\, \sim(a^2 < b^2) \,.\, \supset$$
$$\supset \,.\, a\varepsilon q \,.\, b\varepsilon q \,.\, \sim(a = b) \,.\, \sim(a < b) \qquad (18)$$

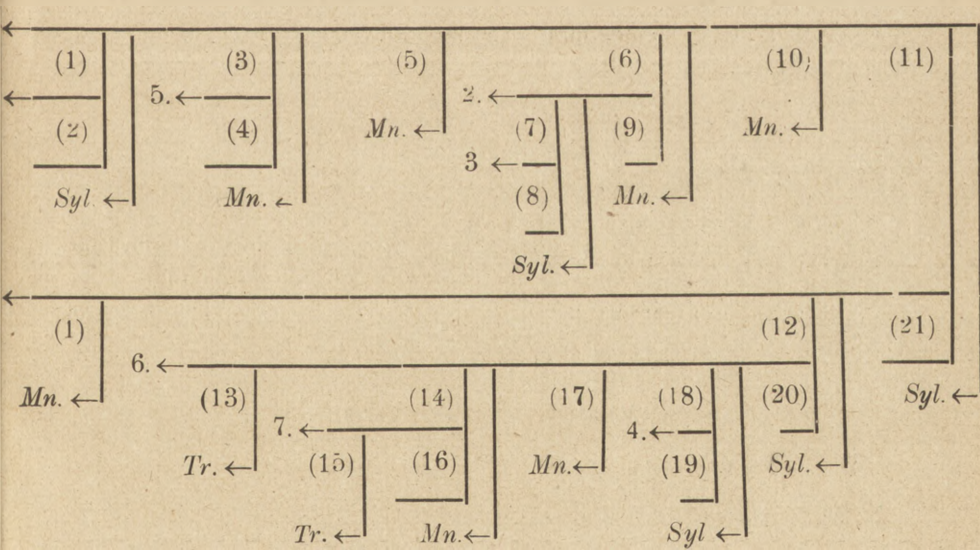
Wreszcie, przepisujemy przesłankę 4:

$$4. \;|\!\rightarrow a\varepsilon q \,.\, b\varepsilon q \,.\, \sim(a = b) \,.\, \sim(a < b) \,.\, \supset \,.\, a > b \qquad (19)$$

Stosując trzykrotnie syllogizm do otrzymanych wyników, dochodzimy do twierdzenia, które mieliśmy udowodnić. Mamy bowiem:

$$(18).(19) \,.\, Syl. \;|\!\rightarrow a\varepsilon p \,.\, a\varepsilon q \,.\, b\varepsilon q \,.\, \sim(a^2 = b^2) \,.\, \sim(a^2 < b^2) \,.\, \supset \,.\, a > b \quad (20)$$
$$(12).(20) \,.\, Syl. \;|\!\rightarrow a\varepsilon p \,.\, b\varepsilon q \,.\, \sim(a^2 = b^2) \,.\, \sim(a^2 < b^2) \,.\, \supset \,.\, a > b \quad (21)$$
$$(11).(21) \,.\, Syl. \;|\!\rightarrow a\varepsilon p \,.\, b\varepsilon q \,.\, a^2 > b^2 \,.\, \supset \,.\, a > b, \quad \text{c.b.d.o.}$$

Schemat tego dowodu jest następujący:




Widzimy, iż w dowodach zupełnych, ogniwotwórczemi są jedynie przesłanki logiczne. Przesłanki matematyczne służą tylko za punkty wyjścia, podobnie, jak dawniej poszczególne części poprzednika dowodzonego twierdzenia; w tym samym charakterze mogą jednak występować także niektóre przesłanki logiczne. Zaznaczyć należy,

iż wyjątek stanowią dowody niektórych twierdzeń matematycznych, mających postać zdań prostych, jak n. p.:

$$2 \varepsilon N \text{ lub } 2 + 2 = 4;$$

w tych dowodach wszystkie przesłanki, a więc także ogniwotwórcze, są matematyczne. Ale takie twierdzenia, w zwykłych książkach matematycznych, należą do rzadkości.

We wszystkich przykładach, jakie dotychczas rozpatrywaliśmy, mieliśmy do czynienia wyłącznie ze zdaniami ogólnemi; znak ogólności opuszczaliśmy tylko dla skrócenia. Tymczasem, jak wiemy, istnieją również zdania szczegółowe, będące przeczeniem ogólnych i mające postać: „Istnieje $x$ takie, że...“.

$$(\exists x)(\ldots)$$

Ten właśnie kształt mają wszystkie twierdzenia o istnieniu. Takie zdania sprawiają nam najwięcej trudności w dowodach zupełnych. Aby dać o tem pojęcie, przytoczymy dowód zupełny twierdzenia XX. ks. IX. Euklidesa, (które już rozważaliśmy w rozdziale X.), w postaci przez nas uogólnionej. Ideograficznie, wyrazi się ono wzorem takim:

$$(\exists x)(x \varepsilon pr \,.\, x \neq a_\mu \quad \mu/1, 2, \ldots n)$$

Symbol *pr.* oznacza tutaj liczbę pierwszą.

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

są to owe dowolnie wybrane (w skończonej ilości) liczby naturalne. Chodzi zatem o istnienie liczby pierwszej, od nich odmiennej.

Przesłanki matematyczne, na których oprzemy dowód twierdzenia Euklidesa, można będzie wyrazić jak następuje:

1. $(\exists x)[x \varepsilon pr \,.\, x dz\, (1 + c)]$
2. $x\, dz\, (1 + c) \,.\, \supset : \sim (x\, dz\, c)$
3. $a_\mu\, dz \left[\prod_{\nu/1}^{n} a_\nu\right] \qquad \mu/1, 2, \ldots, n$
4. $a_\mu\, dz\, y \,.\, \sim (x\, dz\, y) \,.\, \supset . \, x \neq a_\mu \qquad \mu/1, 2, \ldots, n$

Skrót *dz* oznacza tutaj słowo „dzieli“. Dla uniknięcia nieporozumień przypominamy, iż zera do liczb naturalnych nie zaliczamy (zaliczamy je natomiast do liczb całkowitych), jedynki zaś nie uważamy ani za liczbę pierwszą ani za dzielnik jakiejkolwiek liczby naturalnej. Matematycy w takich przypadkach dają zazwyczaj dowód

skrócony w ten sposób, że, skoro dowiedli istnienia jakiejś liczby, oznaczają ją jakimś symbolem wypisują jej własności; to jednak, co oni piszą, nie jest właściwie wnioskiem z przesłanek. Takie dowody zatem nie są dowodami zupełnemi; zato są one od dowodów zupełnych znacznie krótsze. W danym razie n. p. tego rodzaju rozumowanie byłoby takiem: przesłanka 1. wyraża, że każda liczba naturalna, większa od jedności, ma dzielnik pierwszy. Istnieje więc dzielnik pierwszy liczby $1 + \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu$, który oznaczymy przez $a$. Mamy zatem:

$$1.\ \vdash\!\!\longrightarrow a\ dz\,(1 + \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu) \qquad (1)$$

$$(1).\,2\ [x, c \mid a, \prod_{n/1}^{n} a_\nu] \mid\!\!\to \sim \left\{a\ dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu\right\} \qquad (2)$$

$$3.\ \vdash\!\!\longrightarrow a_\mu\ dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu \qquad \mu/1, 2, \ldots, n \qquad (3)$$

$$(2).(3).\,4.\,[x, y \mid a, \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu] \mid\!\!\to a \neq a_\mu \qquad \mu/1, 2, \ldots n \qquad (4)$$

Mamy więc liczbę pierwszą, różną od każdej z liczb

$a_1, a_2, \ldots a_n$, c. b. d. o.

Aby podać dowód zupełny, musimy skorzystać z następujących przesłanek logicznych:

$L_1$. $p \supset q . \supset : r . p . \supset r . q$
$L_2$. $p . q . \supset . r : \supset : p . \supset . q \supset r$
$L_3$. $p . p \supset q : \supset . q$
$L_4$. $p \supset q . \supset : (\exists x) p . \supset . (\exists x) q$

Przesłanki $L_1$, $L_2$, $L_3$ są nam dobrze znane: Pierwsza z nich dotyczy mnożenia, druga wyniesienia, trzecia zaś — to modus ponens jako przesłanka. Ostatnia przesłanka jest przesłanką, przy pomocy której będziemy przekształcać zdania o istnieniu; litery $p$ i $q$ oznaczają tam, oczywiście, funkcje logiczne do których wchodzi zmienna $x$.

Dowód zupełny, oparty na tych przesłankach, ma postać następującą:

$$1.\ [\![c \mid \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu]\!] \mid\!\!\to (\exists x)\ \{x\ \varepsilon\ pr . x\ dz\ (1 + \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu)\} \qquad (1)$$

$$.\ [\![c \mid \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu]\!] \mid\!\!\to x\ dz\ (1 + \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu) . \supset . \sim \{x\ dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu\} \qquad (2)$$

$(2) . L_1 \, [p, q, r \mid x \, dz \, (1 + \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu) \, . \sim \{x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu\} , x \, \varepsilon \, pr] \longmapsto$

$x \, \varepsilon \, pr \, . \, x \, dz \, (1 + \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu) \, . \supset . \, x \, \varepsilon \, pr \, . \sim \{x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu\}$ (3)

$(3) . L_4 \, [p, q \mid x \, \varepsilon \, pr . \, x \, dz \, (1 + \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu) . \, x \, \varepsilon \, pr \, . \sim \{x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu\}] \longmapsto$

$(\exists x) \{x \, \varepsilon \, pr \, . \, x \, dz \, (1 + \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu)\} \, . \supset . \, (\exists x) \{x \, \varepsilon \, pr \, . \sim (x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu)\}$ (4)

$(1) . (4) . L_3 \, [p . q \mid (\exists x) \{x \, \varepsilon \, pr \, . \, x \, dz \, (1 + \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu)\}, (\exists x) \{x \, \varepsilon \, pr \, . \sim (x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu)\}]$

$\mapsto (\exists x) \{x \, \varepsilon \, pr \, . \sim (x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu)\}$ (5)

$3 . \mapsto a_\mu \, dz \prod_{\nu/}^{n} a_\nu \qquad \mu/1, \, 2, \ldots, n$ (6)

$4 . [y \mid \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu] \mapsto a_\mu \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu \, \sim (x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu) \supset . \, x \neq a_\mu \qquad \mu/1, 2, \ldots, n$ (7)

$(7) . L_2 [p, q, r \mid a_\mu \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu , \sim (x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu), x \neq a_\mu] \longmapsto$

$a_\mu \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu \, . \supset : \sim (x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu) \, . \supset . \, x \neq a_\mu \qquad \mu/1, \, 2, \ldots, n$ (8)

$(6) . (8) . L_3 \, [p, q \mid a_\mu \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu \, . \sim (x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu) \, . \supset . \, x \neq a_\mu] \longmapsto$

$\sim x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu) \, . \supset x \neq a_\mu \qquad \mu/1, \, 2, \ldots, n$ (9)

$(9) \, L_1 \, [p, q, r \mid \sim (x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu), x \neq a_\mu \, . \, x \, \varepsilon \, pr] \longmapsto$

$x \, \varepsilon \, pr \, . \sim (x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu) \, . \supset . \, x \, \varepsilon \, pr \, . \, x \neq a_\mu \qquad \mu/1, \, 2, \ldots n$ (10)

$(10) \, L_4 \, [p . q \mid x \, \varepsilon \, pr \, . \sim (x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu), x \, \varepsilon \, pr \, . \, x \neq a_\mu \longmapsto$

$(\exists x) \{x \, \varepsilon \, pr \, . \sim (x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu)\} . \supset . (\exists x) \{x \, \varepsilon \, pr . \, x \neq a_\mu\} \qquad \mu/1 \, 2, \ldots, n$ (11)

$(5) . (11) . L_3 \, [p . q \mid (\exists x) \{x \, \varepsilon \, pr \, . \sim (x \, dz \prod_{\nu/1}^{n} a_\nu)\},$

$(\exists x) \{x \, \varepsilon \, pr \, . \, x \neq a_\mu \;\; \mu/1, 2, \ldots, n\}] \longmapsto$

$(\exists x) \{x \, \varepsilon \, pr \, . \, x \neq a_\mu \qquad \mu/1, \, 2, \ldots, n\},$ c . b . d . o.

Myśl o dowodzie zupełnym powstaje naturalnie i koniecznie, gdy, wychodząc z żądania możliwie największej ścisłości w rozumowaniu. pragniemy uwidoczniać wszystkie podstawy naszych dowodów. Z drugiej jednak strony. widzimy przerażającą długość

dowodów zupełnych, nawet gdy chodzi o rzeczy najprostsze. Powstaje tedy pytanie, o ile dowody zupełne są wykonalne. Obecnie robią one wrażenie, nie dających się przeprowadzić systematycznie, ale to niczego nie dowodzi, bo długość ich pochodzi, być może, stąd, że nie są one dostatecznie zbadane. Nie da się przewidzieć, jak znaczne skrócenia mogą w nich z czasem powstać. Wiele można oczekiwać od uogólnień, t. j. od utworzenia twierdzeń na które można się będzie powoływać w bardzo licznych przypadkach Początek każdej rzeczy jest trudnym. Ale ważność dokładnego zbadania rozumowania dedukcyjnego wogóle i poznania wszystkich wiązań logicznych, na których opartą jest każda teorja dedukcyjna, jest, w naszych oczach, tak doniosłą, że nie powinniśmy rezygnować z tego rodzaju badań.

Koniec pierwszego tomu.

# Skorowidz nazwisk.

# Skorowidz rzeczy.